江苏省兴化市楚水实验学校高中数学竞赛校本教材[全套](共30讲，含详细答案)-苏教版

目录

§1 数学方法选讲（1）

同学们在阅读课外读物的时候，或在听老师讲课的时候，书上的例题或老师讲解的例题他都能听懂，但一遇到没有见过面的问题就不知从何处入手。看来，要提高解决问题的能力，要能在竞赛中有所作为，首先得提高分析问题的能力，这就需要学习一些重要的数学思想方法。

例题讲解

一、从简单情况考虑

华罗庚先生曾经指出：善于“退”，足够的“退”，退到最原始而又不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍。从简单情况考虑，就是一种以退为进的一种解题策略。

1. 两人坐在一张长方形桌子旁，相继轮流在桌子上放入同样大小的硬币。条件是硬币一定要平放在桌子上，后放的硬币不能压在先放的硬币上，直到桌子上再也放不下一枚硬币为止。谁放入了最后一枚硬币谁获胜。问：先放的人有没有必定取胜的策略？

2．线段 AB 上有 1998 个点（包括 A，B 两点），将点 A 染成红色，点 B 染成蓝色，其余各点染成红色或蓝色。这时，图中共有 1997 条互不重叠的线段。

问：两个端点颜色相异的小线段的条数是奇数还是偶数？为什么？

3．1000 个学生坐成一圈，依次编号为 1，2，3，…，1000。现在进行 1，2 报数：1 号学生报 1 后立即离开，2 号学生报 2 并留下，3 号学生报 1 后立即离开，4 号学生报 2 并留下……学生们依次交替报 1 或 2，凡报 1 的学生立即离开，报 2 的学生留下，如此进行下去，直到最后还剩下一个人。问：这个学生的编号是几号？

4．在 6×6 的正方形网格中，把部分小方格涂成红色。然后任意划掉 3 行和 3 列，使得剩下的小方格中至少有 1 个是红色的。那么，总共至少要涂红多少小方格？

二、从极端情况考虑

从问题的极端情况考虑，对于数值问题来说，就是指取它的最大或最小值；对于一个动点来说，指的是线段的端点，三角形的顶点等等。极端化的假设实际上也为题目增加了一个条件，求解也就会变得容易得多。

5. 新上任的宿舍管理员拿着 20 把钥匙去开 20 个房间的门，他知道每把钥匙只能打开其中的一个门，但不知道哪一把钥匙开哪一个门，现在要打开所有关闭的 20 个门，他最多要开多少次？

6．有 n 名（n≥3）选手参加的一次乒乓球循环赛中，没有一个全胜的。问：是否能够找到三名选手 A，B，C，使得 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A？

7．n（n≥3）名乒乓球选手单打比赛若干场后，任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同。

试证明，总可以从中去掉一名选手，而使余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同。

8．在一个 8×8 的方格棋盘的方格中，填入从 1 到 64 这 64 个数。问：是否一定能够找到两个相邻的方格，它们中所填数的差大于 4？

三、从整体考虑

从整体上来考察研究的对象，不纠缠于问题的各项具体的细节，从而能够拓宽思路，抓住主要矛盾，一举解决问题。

9. 右图是一个 4×4 的表格，每个方格中填入了数字 0 或 1。按下列规则进行“操作”：每次可以同时改变某一行的数字：1 变成 0，0 变成 1。

1	0	0	1
1	1	0	1
0	1	0	0
1	0	1	1

问：能否通过若干次“操作”使得每一格中的数都变成 1？

10．有三堆石子，每堆分别有 1998，998，98 粒。现在对这三堆石子进行如下的“操作”：每次允许从每堆中各拿掉一个或相同个数的石子，或从任一堆中取出一些石子放入另一堆中。

按上述方式进行“操作”，能否把这三堆石子都取光？如行，请设计一种取石子的方案；如不行，请说明理由。

11．我们将若干个数 x，y，z，…的最大值和最小值分别记为 max（x，y，z，…）和 min（x，y，z，…）。已知 a+b+c+d+e+f+g=1，求 min[max(a+b+c，b+c+d，c+d+e，d+e+f，e+f+g)]

课后练习

1. 方程 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n-1+x_n=x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}x_n$ 一定有一个自然数解吗？为什么？

2. 连续自然数 1，2，3，…，8899 排成一列。从 1 开始，留 1 划掉 2 和 3，留 4 划掉 5 和 6……这么转圈划下去，最后留下的是哪个数？

3. 给出一个自然数 n，n 的约数的个数用一个记号 A（n）来表示。例如当 n=6 时，因为 6 的约数有 1，2，3，6 四个，所以 A（6）=4。已知 a_1，a_2，…，a_{10} 是 10 个互不相同的质数，又 x 为 a_1，a_2，…，a_{10} 的积，求 A（x）。

4. 平面上有 100 个点，无三点共线。将某些点用线段连结起来，但线段不能相交，直到不能再连结时为止。问：是否存在一个以这些点中的三个点为顶点的三角形，它的内部没有其余 97 个点中的任何一个点？

5. 在一块平地上站着 5 个小朋友，每两个小朋友之间的距离都不相同，每个小朋友手上都拿着一把水枪。当发出射击的命令后，每人用枪射击距离他最近的人。问：射击后有没有一个小朋友身上是干的？为什么？

6. 把 1600 粒花生分给 100 只猴子，请你说明不管怎样分，至少有 4 只猴子分的花生一样多。

7. 有两只桶和一只空杯子。甲桶装的是牛奶，乙桶装的是酒精（未满）。现在从甲桶取一满杯奶倒入乙桶，然后从乙桶取一满杯混合液倒入甲桶，这时，是甲桶中的酒精多，还是乙桶中的牛奶多？为什么？

8. 在黑板上写上 1，2，3，…，1998。按下列规定进行“操作”：每次擦去其中的任意两个数 a 和 b，然后写上它们的差（大减小），直到黑板上剩下一个数为止。

问：黑板上剩下的数是奇数还是偶数？为什么？

课后练习答案

1.有。

解：当 n=2 时，方程 $x_1+x_2=x_1x_2$ 有一个自然数解：$x_1=2$，$x_2=2$;

当 n=3 时，方程 $x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3$ 有一个自然数解：$x_1=1$，x2=2，$x_3=3$；

当 n=4 时，方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=x_1x_2x_3x_4$ 有一个自然数解：$x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=2$，$x_4=4$。

一般地，方程

$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n=x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}x_n$ 有一个自然数解：$x_1=1$，$x_2=1$，…，$x_n-2=1$，$x_{n-1}=2$，$x_n=n$。

2.3508。

解：仿例 3。当有 3^n 个数时，留下的数是 1 号。

小于 8899 的形如 3^n 的数是 3^8=6561，故从 1 号开始按规则划数，划了 8899-6561=2338（个）数后，还剩下 6561 个数。下一个要划掉的数是 2388÷2×3+1=3507，故最后留下的就是 3508。

3.1024。

解：质数 a_1 有 2 个约数：1 和 a，从而 A（a_1）=2；

2 个质数 a_1，a_2 的积有 4 个约数：1，a_1，a_2，a_1a_2，从而

A（a_1×a_2）=4=22；

3 个质数 a_1，a_2，a_3 的积有 8 个约数：

1，a_1，a_2，a_3，a_1a_2，a_2a_3，a_3a_1，$a_1a_2a_3$，

从而 A（a_1×a_2×a_3）=8=23；

……

于是，10 个质数 a_1，a_2，…，a_{10} 的积的约数个数为

A（x）=2^{10}=1024。

4.存在。

提示：如果一个三角形内还有别的点，那么这个点与三角形的三个顶点还能连结，与已“不能再连结”矛盾。

5.有。

解：设 A 和 B 两人是距离最近的两个小朋友，显然他们应该互射。此时如果有其他的小朋友射向他们中的一个，即 A，B 中有一人挨了两枪，那么其他三人中必然有一人身上是干的。如果没有其他的小朋友射向 A 或 B，那么我们再考虑剩下的三个人 D，E，F：若 D，E 的距离是三人中最近的，则 D，E 互射，而 F 必然射向他们之间的一个，此时 F 身上是干的。

6.假设没有 4 只猴子分的花生一样多，那么至多 3 只猴子分的花生一样多。我们从所需花生最少情况出发考虑：

得 1 粒、2 粒、3 粒……32 粒的猴子各有 3 只，得 33 粒花生的猴子有 1 只，于是 100 只猴子最少需要分得花生

3×（0+1+2+…+32）+33=1617（粒），

现在只有 1600 粒花生，无法使得至多 3 只猴子分的花生一样多，故至少有 4 只猴子分的花生一样多。

7.一样多。

提示：从整体看，甲、乙两桶所装的液体的体积没有发生变化。甲桶里有多少酒精，就必然倒出了同样体积的牛奶入乙桶。所以，甲桶中的酒精和乙桶中的牛奶一样多。

8.奇数。

解：黑板上开始时所有数的和为

$$S=1+2+3+\cdots+1998=1997001，$$

是一个奇数，而每一次“操作”，将（a+b）变成了（a-b），实际上减少了 2b，即减少了一个偶数。因为从整体上看，总和减少了一个偶数，其奇偶性不变，所以最后黑板上剩下一个奇数。

例题答案：

1. 分析与解：如果桌子大小只能容纳一枚硬币，那么先放的人当然能够取胜。然后设想桌面变大，注意到长方形有一个对称中心，先放者将第一枚硬币放在桌子的中心，继而把硬币放在后放者所放位置的对称位置上，这样进行下去，必然轮到先放者放最后一枚硬币。

2．分析：从最简单的情况考虑：如果中间的 1996 个点全部染成红色，这时异色线段只有 1 条，是一个奇数。然后我们对这种染色方式进行调整：将某些红点改成蓝点并注意到颜色调整时，异色线段的条数随之有哪些变化。由于颜色的调整是任意的，因此与条件中染色的任意性就一致了。

解：如果中间的 1996 个点全部染成红色，这时异色线段仅有 1 条，是一个奇数。将任意一个红点染成蓝色时，这个改变颜色的点的左右两侧相邻的两个点若同色，则异色小线段的条数或者增加 2 条（相邻的两个点同为红色），或者减少 2 条（相邻的两个点同为蓝色）；这个改变颜色的点的左右两侧相邻的两个点若异色，则异色小线段的条数不变。

综上所述，改变任意个点的颜色，异色线段的条数的改变总是一个偶数，从而异色线段的条数是一个奇数。

3．分析：这个问题与上一讲练习中的第 8 题非常相似，只不过本例是报 1 的离开报 2 的留下，而上讲练习中相当于报 1 的留下报 2 的离开，由上讲练习的结果可以推出本例的答案。本例中编号为 1 的学生离开后还剩 999 人，此时，如果原来报 2 的全部改报 1 并留下，原来报 1 的全部改报2 并离开，那么，问题就与上讲练习第 8 题完全一样了。因为剩下 999 人时，第 1 人是 2 号，所以最后剩下的人的号码应比上讲练习中的大 1，是

975＋1=976（号）。

为了加深理解，我们重新解这道题。

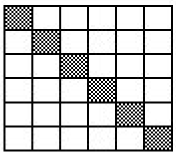
解：如果有 2^n个人，那么报完第 1 圈后，剩下的是 2 的倍数号；报完第 2 圈后，剩下的是 2^2 的倍数号……报完第 n 圈后，剩下的是 2^n的倍数号，此时，只剩下一人，是 2^n 号。

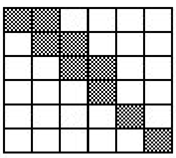
如果有（2^n＋d）（1≤d＜2^n）人，那么当有 d 人退出圈子后还剩下 2^n 人。因为下一个该退出去的是（2d＋1）号，所以此时的第（2d＋1）号相当于 2^n 人时的第 1 号，而 2d 号相当于 2^n 人时的第 2^n 号，所以最后剩下的是第 2d 号。

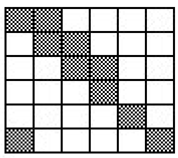
由 1000=2^9＋488 知，最后剩下的学生的编号是

488×2=976（号）。

4．分析与解：先考虑每行每列都有一格涂红，比较方便的涂法是在一条对角线上涂 6 格红色的，如图 1。


图1


图2


图3

任意划掉 3 行 3 列，可以设想划行划列的原则是：每次划掉红格的个数越多越好。对于图 1，划掉 3 行去掉 3 个红格，还有 3 个红格恰在 3 列中，再划掉 3 列就不存在红格了。

所以，必然有一些行有一些列要涂 2 个红格，为了尽可能地少涂红格，那么每涂一格红色的，一定要使多出一行同时也多出一列有两格红色的。

先考虑有 3 行中有 2 格涂红，如图 2。显然，同时也必然有 3 个列中也有 2 格涂红。这时，我们可以先划掉有 2 格红色的 3 行，还剩下 3 行，每行上只有一格涂红，每列上也只有一格涂红，那么在划掉带红格的 3 列就没有红格了。

为了使得至少余下一个红格，只要再涂一格。此红格要使图中再增加一行和一列有两个红格的，如图 3。

结论是：至少需要涂红 10 个方格。

5. 解：从最不利的极端情况考虑：打开第一个房间要 20 次，打开第二个房间需要 19 次……共计最多要开

20＋19＋18＋…＋1=210（次）。

6. 解：从极端情况观察入手，设B 是胜的次数最多的一个选手，但因B 没获全胜，故必有选手 A 胜 B。在败给 B 的选手中，一定有一个胜 A 的选手 C，否则，A 胜的次数就比 B 多一次了，这与 B 是胜的次数最多的矛盾。

所以，一定能够找到三名选手 A，B，C，使得 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A。

7. 证明：如果去掉选手 H，能使余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同，那么我们称 H 为可去选手。我们的问题就是要证明存在可去选手。

设 A 是已赛过对手最多的选手。

若不存在可去选手，则 A 不是可去选手，故存在选手 B 和 C，使当去掉 A 时，与 B 赛过的选手和与 C 赛过的选手相同。从而 B 和 C 不可能赛过，并且 B 和 C 中一定有一个（不妨设为 B）与 A 赛过，而另一个（即 C）未与 A 赛过。

又因 C 不是可去选手，故存在选手 D，E，其中 D 和 C 赛过，而 E 和 C 未赛过。

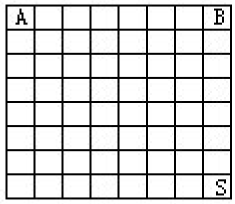
显然，D 不是 A，也不是 B，因为 D 与 C 赛过，所以 D 也与 B 赛过。又因为 B 和 D 赛过，所以 B 也与 E 赛过，但 E 未与 C 赛过，因而选手 E 只能是选手 A。

于是，与 A 赛过的对手数就是与 E 赛过的对手数，他比与 D 赛过的对手数少 1，这与假设 A 是已赛过对手最多的选手矛盾。

故一定存在可去选手。

8. 解：考虑这个方格棋盘的左上角、右上角及右下角内的数 A，B，S。

设存在一个填数方案，使任意相邻两格中的数的差不大于 4，考虑最大和最小的两个数 1 和 64 的填法，为了使相邻数的差不大于 4，最小数 1 和最大数的“距离”越大越好，即把它们填在对角的位置上（A=1，S=64）。



然后，我们沿最上行和最右行来观察：因为相邻数不大于 4，从 A→B→S 共经过 14 格，所以 S≤1+4×14=57（每次都增加最大数 4），与 S=64 矛盾。因而，1 和 64 不能填在“最远”的位置上。显然，1 和 64 如果填在其他任意位置，那么从 1 到 64 之间的距离更近了，更要导致如上的矛盾。因此，不存在相邻数之差都不大于 4 的情况，即不论怎样填数必有相邻两数的差大于 4。

9. 解：我们考察表格中填入的所有数的和的奇偶性：第一次“操作”之前，它等于 9，是一个奇数，

每一次“操作”，要改变一行或一列四个方格的奇偶性，显然整个 16 格中所有数的和的奇偶性不变。

但当每一格中所有数字都变成 1 时，整个 16 格中所有数的和是 16，为一偶数。故不能通过若干次“操作”使得每一格中的数都变成 1。

10. 解：要把三堆石子都取光是不可能的。

按“操作”规则，每次拿掉的石子数的总和是 3 的倍数，即不改变石子总数被 3 除时的余数。而 1998+998+98=3094，被 3 除余 1，三堆石子被取光时总和被 3 除余 0。所以，三堆石子都被取光是办不到的。

11. 解：设 M=max（a+b+c，b+c+d，c+d+e，d+e+f，e+f+g）。

因为 a+b+c，c+d+e，e+f+g 都不大于 M，所以

$$M \geqslant \frac{1}{3}[(a+b+c)+(c+d+e)+(e+f+g)]$$
$$=\frac{1}{3}[(a+b+c+d+e+f+g)+(c+e)]$$
$$=\frac{1}{3}(1+c+e) \geqslant \frac{1}{2}$$

§2 数学方法选讲（2）

四、从反面考虑

解数学题，需要正确的思路。对于很多数学问题，通常采用正面求解的思路，即从条件出发，求得结论。但是，如果直接从正面不易找到解题思路时，则可改变思维的方向，即从结论入手或从条件及结论的反面进行思考，从而使问题得到解决。

1．某次数学测验一共出了 10 道题，评分方法如下：

每答对一题得 4 分，不答题得 0 分，答错一题倒扣 1 分，每个考生预先给 10 分作为基础分。问：此次测验至多有多少种不同的分数？

2．一支队伍的人数是 5 的倍数，且超过 1000 人。若按每排 4 人编队，则最后差 3 人；若按每排3 人编队，则最后差 2 人；若按每排 2 人编队，则最后差 1 人。问：这支队伍至少有多少人？

3．在八边形的 8 个顶点上是否可以分别记上数 1，2，…，8，使得任意三个相邻的顶点上的数的和大于 13？

4．有一个 1000 位的数，它由 888 个 1 和 112 个 0 组成，这个数是否可能是一个平方数？

五、从特殊情况考虑

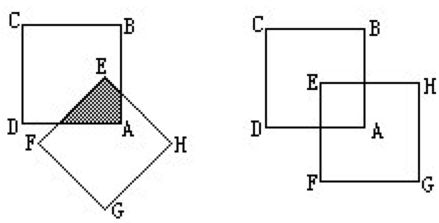
对于一个一般性的问题，如果觉得难以入手，那么我们可以

先考虑它的某些特殊情况，从而获得解决的途径，使问题得以“突破”，这种方法称为特殊化。

对问题的特殊情况进行研究，一方面是因为研究特殊情况比研究一般情况较为容易；另一方面是因为特殊的情况含有一般性，所以对特殊情况的研究常能揭示问题的结论或启发解决问题的思路，它是探索问题的一种重要方法。

运用特殊化方法进行探索的过程有两个步骤，即先由一般到特殊，再由特殊到一般。通过第一步骤得到的信息，还要回到一般情况予以解答。

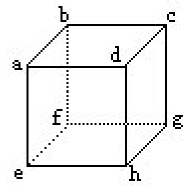
5．如下图，四边形 ABCD 和 EFGH 都是正方形，且边长均为 2cm。又 E 点是正方形 ABCD 的中心，求两个正方形公共部分（图中阴影部分）的面积 S。



6．是否在平面上存在这样的 40 条直线，它们共有 365 个交点？

7．如右图，正方体的 8 个顶点处标注的数字为 a，b，c，d，e，f，g，h，其中每个数都等于相邻3个顶点处的数的和的 $\frac{1}{3}$。

求（a+b+c+d）-（e+f+g+h）的值。



8．将 n^2 个互不相等的数排成下表：

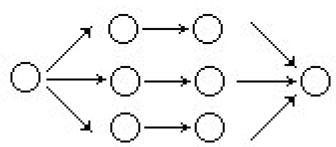
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

先取每行的最大数，得到 n 个数，其中最小数为 x；再取每列的最小数，也得到 n 个数，其中最大数为 y。试比较 x 和 y 的大小。

六、有序化

当我们研究的对象是一些数的时候，我们常常将这些数排一个次序，即将它们有序化。有序化的假设，实际上是给题目增加了一个可供使用的条件。

9．将 10 到 40 之间的质数填入下图的圆圈中，使得 3 组由"→"所连的 4 个数的和相等，如果把和数相等的填法看做同一类填法，请说明一共有多少类填法？并画图表示你的填法。



10．有四个互不相等的数，取其中两个数相加，可以得到六个和：24，28，30，32，34，38。求此四数。

11．互不相等的 12 个自然数，它们均小于 36。有人说，在这些自然数两两相减（大减小）所得到的差中，至少有 3 个相等。你认为这种说法对吗？为什么？

12．有 8 个重量各不相同的物品，每个物品的重量都是整克数且都不超过 15 克。小平想以最少的次数用天平称出其中最重的物品。他用了如下的测定法：

（1）把 8 个物品分成 2 组，每组 4 个，比较这 2 组的轻重；

（2）把以上 2 组中较重的 4 个再分成 2 组，即每组 2 个，再比较它们的轻重；

（3）把以上 2 组中较重的分成各 1 个，取出较重的 1 个。

小平称了 3 次天平都没有平衡，最后便得到一个物品。

可是实际上得到的是这 8 个物品当中从重到轻排在第 5 的物品。

问：小平找出的这个物品有多重？并求出第二轻的物品重多少克？

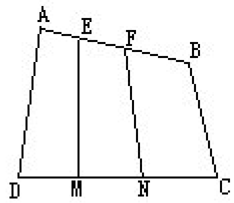
课后练习

1. 育才小学 40 名学生参加一次数学竞赛，用 15 分记分制（即分数为 0，1，2，…，15）。全班总分为 209 分，且相同分数的学生不超过 5 人。试说明得分超过 12 分的学生至多有 9 人。

2. 今有一角纸币、二角纸币、五角纸币各 1 张，一元币 4 张，五元币 2 张，用这些纸币任意付款，一共可以付出多少种不同数额的款项？

3. 求在 8 和 98 之间（不包括 8 和 98），分母为 3 的所有最简分数的和。

4. 如右图，四边形 ABCD 的面积为 3，E，F 为边 AB 的三等分点，M，N 是 CD 边上的三等分点。求四边形 EFNM 的面积。



5. 直线上分布着 1998 个点，我们标出以这些点为端点的一切可能线段的中点。问：至少可以得到多少个互不重合的中点？

6. 假定 100 个人中的每一个人都知道一个消息，而且这 100 个消息都不相同。为了使所有的人都知道一切消息，他们一共至少要打多少个电话？

7. 有 4 个互不相等的自然数，将它们两两相加，可以得到 6 个不同的和，其中较小的 4 个和是 64，66，68，70。求这 4 个数。

8. 有五个砝码，其中任何四个砝码都可以分成重量相等的两组。问：这五个砝码的重量相等吗？为什么？

课后练习答案

1. 若得分超过 12 分的学生至少有 10 人，则全班的总分至少有

5×（12+13）+5×（0+1+2+3+4+5）=210（分），

大于条件 209 分，产生了矛盾，故得分超过 12 分的学生至多有 9 人。

2. 119 种。

解：从最低币值 1 角到最高币值 14 元 8 角，共148 个不同的币值。再从中剔除那些不能由这些纸币构成的币值。

经计算，应该剔除的币值为（i+0.4）元（i=0，1，2，…，14）及（j+0.9）元（j=1，2，3，…，13），一共 29 种币值。所以，一共可以付出 148-29=119（种）不同的币值。

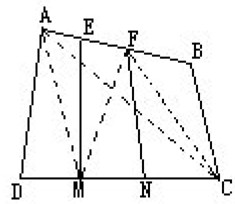
3. 9540。

解：$8\frac{1}{3}+8\frac{2}{3}+9\frac{1}{3}+9\frac{2}{3}+\cdots+97\frac{1}{3}+97\frac{2}{3}$

=2×（8+9+…+97）+（97-8+1）=9540。

4. 1。

解：先考虑 ABCD 是长方形的特殊情况，显然此时 EFNM 的面积是 1。下面就一般情况求解。



连结 AC，AM，FM，CF，则

$$S_{\triangle AMC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ADC},\ S_{\triangle CFA}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC},$$

于是$S_{四边形AMCF}=\frac{2}{3}S_{四边形ABCD}=2$。又

$$S_{\triangle EFM}=\frac{1}{2}S_{\triangle AMF},\ S_{\triangle MNF}=\frac{1}{2}S_{\triangle CMF},$$

故有$S_{四边形EFNM}=\frac{1}{2}S_{四边形AMCF}=1$。

5. 3993 个。

解：为了使计算互不重复，我们取距离最远的两点 A，B。先计算以 A 为左端点的所有线段，除 B 外有 1996 条，这些线段的中点有 1996 个，它们互不重合，且到点 A 的距离小于 AB 长度的一半。

同样，以 B 为右端点的所有线段，除 A 外有 1996 条，这些线段的中点有 1996 个，它们互不重合，且到点 A 的距离小于 AB 长度的一半。

这两类中点不会重合，加上 AB 的中点共有 1996+1996+1=3993（个），即互不重合的中点不少于 3993 个。

另一方面，当这 1998 个点中每两个相邻点的间隔都相等时，不重合的中点数恰为 3993。

这说明，互不重合的中点数至少为 3993 个。

6. 198 个。

解：考虑一种特殊的通话过程：先由 99 人每人打一个电话给 A，A 再给 99 人每人打一个电话，这样一共打了 198 个电话，而且每人都知道了所有的消息。

下面我们说明这是次数最少的。考虑一种能使所有人知道一切消息的通话过程中的关键性的一次通话，这次通话后，有一个接话人 A 知道了所有的消息，而在此之前还没有人知道所有的消息。

除了 A 以外的 99 人每人在这个关键性的通话前，必须打出电话一次，否则 A 不可能知道所有的消息；又这 99 人每人在这个关键性的通话后，又至少收到一个电话，否则它们不可能知道所有的消息。

7. 30，34，36，38 或 31，33，35，39。

解：设 4 个数为 a，b，c，d，且 $a<b<c<d$，则 6 个和为 $a+b$，$a+c$，$a+d$，$b+c$，$b+d$，$c+d$。于是有

$$a+b<a+c<a+d<b+d<c+d$$

和 $a+b<a+c<b+c<b+d<c+d$。

从而有 $\begin{cases} a+b=64, \\ a+c=66, \\ a+d=68, \\ b+c=70, \end{cases}$ 和 $\begin{cases} a+b=64, \\ a+c=66, \\ a+d=70, \\ b+c=68。 \end{cases}$

分别解这两个方程组，得

$$\begin{cases} a=30, \\ b=34, \\ c=36, \\ d=38, \end{cases} \text{和} \begin{cases} a=31, \\ b=33, \\ c=35, \\ d=39。 \end{cases}$$

8. 相等。

解：设这五个砝码的重量依次为 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$。

去掉 e，则有 $a+d=b+c$； ①

去掉 d，则有 $a+e=b+c$。 ②

比较①②，得 d=e。

去掉 a，则有 b+e=c+b； ③

去掉 b，则有 a+e=c+d。 ④

比较③④，得 a=b。

将 a=b 代入①得 c=d，将 d=e 代入④得 b=c。所以 e=b=c=d=e。

例题答案：

1. 分析：最高的得分为 50 分，最低的得分为 0 分。但并不是从 0 分到 50 分都能得到。

从正面考虑计算量较大，故我们从反面考虑，先计算有多少种分数达不到，然后排除达不到的分数就可以了。

解：最高的得分为 50 分，最低的得分为 0 分。在从 0 分到 50 分这 51 个分数中，有 49，48，47，44，43，39 这 6 种分数是不能达到的，故此次测验不同的分数至多有 51-6=45（种）。

2. 分析：从条件“若按每排 4 人编队，则最后差 3 人”的反面来考虑，可理解为“若按每排 4 人编队，则最后多 1 人”。同理，按 3 人、2 人排队都可理解为多 1 人。即总人数被 12 除余 1。这样一来，原题就化为：

一个 5 的倍数大于 1000，且它被 12 除余 1。问：这个数最小是多少？

解：是 5 的倍数且除以 12 余 1 的最小自然数是 25。因为人数超过 1000，[3，4，5]=60，所以最少有

25+60×17=1045（人）。

3. 解：将八边形的 8 个顶点上的数依次记为 a1，a2，a3，…，a8，则有 S=a1+a2+a3+…+a8=1+2+3+…+8=36。

假设任意 3 个相邻顶点上的数都大于 13，因为顶点上的数都是整数，所以

a1+a2+a3≥14；

a2+a3+a4≥14；

……

a7+a8+a1≥14；

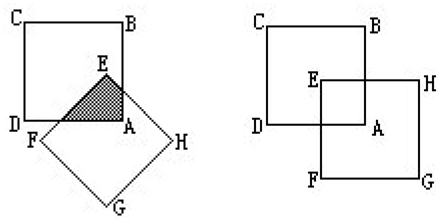
a8+a1+a2≥14。

将以上 8 个不等式相加，得 3S≥112，从而 S＞ 37，这与 S=36 矛盾。故结论是否定的。

4．解：假设这个数为 A，它是自然数 a 的平方。

因为 A 的各位数字之和 888 是 3 的倍数，所以 a 也应是 3 的倍数。于是 a 的平方是 9 的倍数，但 888 不是 9 的倍数，这样就产生了矛盾，从而 A 不可能是平方数。

5.



分析：我们先考虑正方形 EFGH 的特殊位置，即它的各边与正方形 ABCD 的各边对应平行的情况（见上图）。此时，显然有

$$S=2\times2\times\frac{1}{4}=1\ (cm^2)。$$

得出答案后，这个问题还得回到一般情况下去解决，解决的方法是将一般情况变成特殊情况。

解： 自 E 向 AB 和 AD 分别作垂线 EN 和 EM（右图），则有

S=S△PME+S 四边形 AMEQ

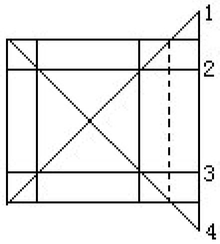
又 S△PME=S△EQN，故

S=S△EQN+S 四边形 AMEQ

=S 正方形 AMEN

$$=2\times2\times\frac{1}{4}=(cm^2)$$

6. 分析与解：先考虑一种特殊的图形：围棋盘。它有 38 条直线、361 个交点。我们就从这种特殊的图形出发，然后进行局部的调整。



先加上 2 条对角线，这样就有 40 条直线了，但交点仍然是 361 个。再将最右边的 1 条直线向右平移 1 段，正好增加了 4 个交点（见上图）。于是，我们就得到了有 365 个交点的 40 条直线。

7. 分析：从这 8 个数都相等的特殊情况入手，它们满足题目条件，从而得所求值为 0。这就启发我们去说明 a+b+c+d=e+f+g+h。

解： 由已知得

3a=b+e+d，3b=a+c+f，

3c=b+d+g，3d=a+c+h，

推知

$$3a+3b+3c+3d=2a+2b+2c+2d+e+f+g+h,$$

$$a+b+c+d=e+f+g+h,$$

$$(a+b+c+d)-(e+f+g+h)=0。$$

8. 分析：先讨论 n=3 的情况，任取两表：

1	3	7
2	5	6
8	9	4

1	2	3
4	5	6
7	8	9

左上表中 x=6，y=4；右上表中 x=3，y=3。两个表都满足 x≥y，所以可以猜想 x≥y。

解：设 x 是第 i 行第 j 列的数 a_{ij}，y 是第 l 行第 m 列的数 a_{lm}。考虑 x 所在的行与 y 所在的列交叉的那个数，即第 i 行第 m 列的数 a_{im}。显然有 $a_{ij}\geq a_{im}\geq a_{lm}$，当 i=l，j=m 时等号成立，所以 x≥y。

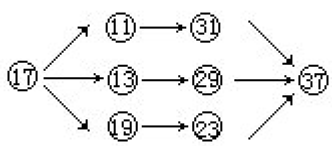
9. 解：10 到 40 之间的 8 个质数是

11，13，17，19，23，29，31，37。

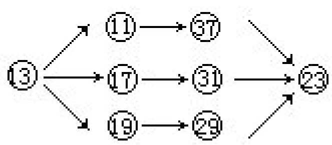
根据题目要求，除去最左边和最右边的 2 个质数之外，剩下的 6 个质数在同一行的 2 个质数的和应分别相等，等于这 6 个数中最小数（记为 a）与最大数（记为 b）之和 a+b。根据 a，b 的大小可分为 6 种情况：

当 a=11，b=29 时，无解；

当 a=11，b=31 时，有 11+31=13+29=19+23，得到如下填法：



当 a=11，b=37 时，有 11+37=17+31=19+29，得到如下填法：



当 a=13，b=31 时，无解；

当 a=13， b=37 时，无解；

当 a=17，b=37 时，无解。

所以，共有 2 类填法。

10. 解：设四个数为 a，b，c，d，且 a＜b＜c＜d，则六个和为 a+b，a+c，a+d，b+c，b+d，c+d，其中 a+b 最小，a+c 次小，c+d 最大，b+d 次大，a+d 与 b+c 位第三和第四。

从而有 $\begin{cases} a+b=24 \\ a=c=28 \\ a=d=30 \\ b+c=32 \\ b+d=34 \\ c+d=38 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} a+b=24 \\ a+c=28 \\ a+d=32 \\ b+c=30 \\ b+d=34 \\ c+d=38 \end{cases}$

分别解这两个方程组，得

$$\begin{cases} a=10 \\ b=14 \\ c=18 \\ d=20 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} a=11 \\ b=13 \\ c=17 \\ d=21 \end{cases}$$

11. 解：设这 12 个自然数从小到大依次为 a1，a2，a3，…，a12，且它们两两相减最多只有 2 个差相等，那么差为 1，2，3，4，5 的都最多只有 2 个。从而

a12-a11，a11-a10，a10-a9，…，a2-a1，

这 11 个差之和至少为

2×（1+2+3+4+5）+6=36，

但这 11 个差之和等于 a12-a1＜36。这一矛盾说明，两两相减的差中，至少有 3 个相等。

12. **解：**设这 8 个物品的重量从重到轻依次排列为：

15≥a1＞a2＞a3＞a4＞a5＞a6＞a7＞a8≥1。

小平找出的这个物品重量为 a5，第二轻的物品重量为 a7。

由于 a5 加上一个比它轻的物品不可能大于两个比 a5 重的物品重量之和，因而第一次必须筛去 3 个比 a5 重的物品。

这样就有以下四种可能：

$$\text{第一种}\begin{cases}a_4+a_5+a_6+a_7>a_1+a_2+a_3+a_8, & ①\\ a_5+a_6>a_4+a_7, & ②\\ a_5>a_6, & ③\end{cases}$$

$$\text{第二种}\begin{cases}a_3+a_5+a_6+a_7>a_1+a_2+a_4+a_8,\\ a_5+a_6>a_3+a_7,\\ a_5>da_6,\end{cases}$$

$$\text{第三种}\begin{cases}a_2+a_5+a_6+a_7>a_1+a_3+a_4+a_8,\\ a_5+a_6>a_2+a_7,\\ a_5>a_6,\end{cases}$$

$$\text{第四种}\begin{cases}a_1+a_5+a_6+a_7>a_2+a_3+a_4+a_8。\\ a_5+a_6>a_1+a_7, & ④\\ a_5>a_6。\end{cases}$$

先考虑第一种情况。根据①式，a4 比 a1 至少轻 3 克，a5 比 a2，a6 比 a3 也都至少轻 3 克，则 a7 比 a8 至少重 10 克。根据②式，a5 比 a4 至少轻 1 克，则 a6 比 a7 至少重 18 克。与已知矛盾，第一种情况不可能出现。

按同样的推理方法，可以说明第二种和第三种情况也不可能出现。

最后，考虑第四种情况。a1 比 a2 至少重 1 克；a5 比 a3，a6 比 a4 都至少轻 1 克，则 a7 比 a8 至少重 4 克。根据④式，a5 比 a4 至少轻 4 克，则 a6 比 a7 至少重 5 克。这样得到的这 8 个物品的重量分别为：

a1=15 克， a2=14 克， a3=13 克， a4=12 克，

a5=11 克， a6=10 克， a7=5 克， a8=1 克。

因此，小平找出的这个物品重 11 克，第二轻的物品重 5 克。

§3 集　合

集合的划分反映了集合与子集之间的关系，这既是一类数学问题，也是数学中的解题策略——分类思想的基础，在近几年来的数学竞赛中经常出现，日益受到重视，本讲主要介绍有关的概念、结论以及处理集合、子集与划分问题的方法。

1．集合的概念

集合是一个不定义的概念，集合中的元素有三个特征：

（1）确定性　设 A 是一个给定的集合，a 是某一具体对象，则 a 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两者必居其一，即 $a\in A$ 与 $a\notin A$ 仅有一种情况成立。

（2）互异性　一个给定的集合中的元素是指互不相同的对象,即同一个集合中不应出现同一个元素。

（3）无序性

2．集合的表示方法

主要有列举法、描述法、区间法、语言叙述法。常用数集如：N,Z,Q,R 应熟记。

3．实数的子集与数轴上的点集之间的互相转换，有序实数对的集合与平面上的点集可以互相转换。对于方程、不等式的解集，要注意它们的几何意义。

4．子集、真子集及相等集

（1）$A\subseteq B\Leftrightarrow A\subset B$ 或 $A=B$；

（2）$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $A\neq B$；

（3）$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$。

5．一个 n 阶集合（即由个元素组成的集合）有 2^n 个不同的子集，其中有 2^n-1 个非空子集，也有 2^n-1 个真子集。

6．集合的交、并、补运算

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$；　$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

$\overline{A}=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$

要掌握有关集合的几个运算律：

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

（3）分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

（4）0—1 律　$A\cup\phi=A$，　$A\cap I=A$，　$A\cup I=I$，　$A\cap\phi=\phi$

（5）等幂律　$A\cup A=A$，　$A\cap A=A$

（6）吸收律　$A\cup(A\cap B)=A$，　$A\cap(A\cup B)=A$

（7）求补律　$A\cup C_I A=I$，　$A\cap C_I A=\phi$

（8）反演律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

7．有限集合所含元素个数的几个简单性质

设$n(X)$表示集合X所含元素的个数,（1）$n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)$,

当$n(A\bigcap B)=\phi$时，$n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)$

（2）$n(A\bigcup B\bigcup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\bigcap B)-n(A\bigcap C)-n(B\bigcap C)+n(A\bigcap B\bigcap C)$

例题讲解

元素与集合的关系

1．设$A=\{a|a=x^2-y^2,x,y\in Z\}$，求证：（1）$2k-1\in A(k\in Z)$；

（2）$4k-2\notin A\ (k\in Z)$

2．以某些整数为元素的集合P具有下列性质：①P中的元素有正数，有负数；

②P中的元素有奇数,有偶数；③$-1\notin P$；④若x，$y\in P$,则$x+y\in P$试判断实数0和2与集合P的关系。

3．设S为满足下列条件的有理数的集合：①若$a\in S$，$b\in S$，则$a+b\in S$，$ab\in S$；②对任一个有理数r，三个关系$r\in S$，$-r\in S$，$r=0$有且仅有一个成立。证明：S是由全体正有理数组成的集合。

两个集合之间的关系

在两个集合之间的关系中，我们感兴趣的是“子集”、“真子集”、“相等”这三种特殊关

系。这些关系是通过元素与集合的关系来揭示的，因而判断两个集合之间的关系通常可从判断元素与这两个集合的关系入手。

4．设函数 $f(x)=x^2+ax+b\ (a,b\in R)$，集合 $A=\{x|\ x=f(x),x\in R\}$，

$B=\{x|\ x=f[f(x)],x\in R\}$。

（1）证明： $A\subseteq B$；

（2）当 $A=\{-1,3\}$ 时，求 B。

（3）当 A 只有一个元素时，求证： $A=B$.

5． S_1,S_2,S_3 为非空集合，对于 1，2，3 的任意一个排列 i,j,k，若 $x\in S_i,y\in S_j$，则

$x-y\in S_k$

（1）证明：三个集合中至少有两个相等。

（2）三个集合中是否可能有两个集无公共元素？

6．已知集合：

$A=\{(x,y)\,|\,ax+y=1\},B=\{(x,y)\,|\,x+ay=1\},C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ 问

（1）当 a 取何值时，$(A\bigcup B)\bigcap C$ 为含有两个元素的集合？

（2）当 a 取何值时，$(A\bigcup B)\bigcap C$ 为含有三个元素的集合？

7．设 $n\in N$ 且 $n\geqslant 15$， A,B 都是{1，2，3，…， n}真子集， $A\bigcap B=\phi$，且 $A\bigcup B$={1，2，3，…， n}。证明： A 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数。

课后练习

1．下列八个关系式:①{0}=ϕ ②ϕ=0 ③$\phi \subsetneqq \{\phi\}$ ④$\phi \in \{\phi\}$⑤$\{0\} \supseteq \phi$ ⑥$0 \notin \phi$ ⑦$\phi \neq \{0\}$

⑧$\phi \neq \{\phi\}$ 其中正确的个数 （ ）

（A）4 （B）5 （C）6 （D）7

2．设 A、B 是全集 U 的两个子集，且 A$\subseteq$B，则下列式子成立的是 （ ）

（A）$C_UA \subseteq C_UB$ （B）$C_UA \cup C_UB=U$ （C）$A \cap C_UB=\phi$ （D）$C_UA \cap B=\phi$

3．已知 M=$\{x|\ x=3n, n\in Z\}$, $N=\{x|\ x=3n+1, n\in Z\}$, $P=\{x\ |\ x=3n-1, n\in Z\}$，且 $a\in M, b\in N, c\in P$，设 $d=a-b+c$，则 $d\in$ （ ）

（A）M （B）N （C）P （D）$M\cup P$

4．设集合 $M=\{x\ |\ x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, k\in Z\}, N=\{x|\ x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}, k\in Z\}$，则 （ ）

（A）$M\subseteq N$ （B）$N\subseteq M$ （C）$M=N$ （D）$M\cap N=\Phi$

5．设 M={1,2,3,…,1995}，A 是 M 的子集且满足条件: 当 x∈A 时,15x$\notin$A，则 A 中元素的个数最多是_______________.

6. 集合 A,B 的并集 A∪B={a_1,a_2,a_3}，当且仅当 A≠B 时，(A,B)与(B,A)视为不同的对，则这样的(A,B)对的个数有________________.

7．若非空集合 A={x|2a+1≤x≤3a-5}，B={x|3≤x≤22},则能使 A$\subseteq$A∩B 成立的 a 的取值范围是_______________.

8．若 A={x|0≤x^2+ax+5≤4}为单元素集合，则实数 a 的值为__________________.

9．设 A={n|100≤n≤600,n∈N}，则集合 A 中被 7 除余 2 且不能被 57 整除的数的个数为______________.

10．已知集合 A={x|x=f(x)}，B={x|x=f(f(x))},其中 f(x)=x^2+ax+b (a,b∈R)，

证明：（1）A$\subseteq$B （2）若 A 只含有一个元素，则 A=B .

11．集合 A={（x,y）$|x^2+mx-y+2=0$},集合 B={（x,y）$|x-y+1=0$,且 $0\le x\le 2$}，

又 $A\cap B\neq\phi$，求实数 m 的取值范围.

课后练习答案

1-4 C C B A

5．解：由于 1995=15×133，所以，只要 n>133，就有 15n>1995.故取出所有大于 133 而不超过 1995 的整数. 由于这时已取出了 15×9=135, … 15×133=1995. 故 9 至 133 的整数都不能再取，还可取 1 至 8 这 8 个数，即共取出 1995—133+8=1870 个数, 这说明所求数≥1870。

另一方面，把 k 与 15k 配对，（k 不是 15 的倍数，且 1≤k≤133）共得 133—8=125 对，每对数中至多能取 1 个数为 A 的元素，这说明所求数≤1870，综上可知应填 1870

6．解：A=φ时，有 1 种可能；A 为一元集时，B 必须含有其余 2 元，共有 6 种可能；A 为二元集时，B 必须含有另一元.共有 12 种可能；A 为三元集时，B 可为其任一子集.共 8 种可能.故共有 1+6+12+8=27 个.

7．解：由 A 非空知 2a+1≤3a-5，故 a≥6. 由 A⊂A∩B 知 A⊂B. 即 3≤2a+1 且 3a-5≤22, 解之，得 1≤a≤9. 于是知 6≤a≤9

8．解：由 $x^2+ax+5=(x+\frac{1}{2}a)^2+5-\frac{1}{4}a^2$.若 $5-\frac{1}{4}a^2<4$，则 A 有无数个元，若 $5-\frac{1}{4}a^2>4$，则 A 为空集，只有当 $5-\frac{1}{4}a^2=4$ 即 $a=\pm2$ 时，A 为单元素集 $\{-1\}$ 或 $\{1\}$.所以 $a=\pm2$

9．解：被 7 除余 2 的数可写为 7k+2. 由 100≤7k+2≤600. 知 14≤k≤85. 又若某个 k 使 7k+2 能被 57 整除，则可设 7k+2=57n. 即 $k=\frac{57n-2}{7}=\frac{56n+n-2}{7}=8n+\frac{n-2}{7}$. 即 n-2 应为 7 的倍数. 设 n=7m+2 代入，得 k=57m+16. ∴14≤57m+16≤85. m=0, 1. 于是所求的个数为 85-(14-1)-2=70

10．证明：（1）$\because x\in A\Rightarrow f(x)=x,\ \therefore f(f(x))=f(x)=x\Rightarrow x\in B\ \therefore A\subseteq B$

(2)设 A={c}，即二次方程 $f(x)-x=0$ 有惟一解 c，即 c 为 $f(x)-x=0$ 的重根.

∴ $f(x)-x=(x-c)^2$ 即 $f(x)=(x-c)^2+x$,于是 $f(f(x))=(f(x)-c)^2+f(x)$,

$f(f(x))-x=(f(x)-c)^2+f(x)-x=[(x-c)^2+x-c]^2+(x-c)^2=0$

$$\therefore\begin{cases}(x-c)^2+x-c=0\\x=c\end{cases}$$

故 $f(f(x))=x$ 也只有惟一解 x=c，即 B={c}. 所以 A=B

11．解：由 $\begin{cases}x^2+mx-y+2=0\\x-y+1=0\end{cases}$ 得 $x^2+(m-1)x+1=0$

设 $f(x)=x^2+(m-1)x+1$ 由数形结合得: $\begin{cases}0<-\frac{m-1}{2}\le2\\\Delta=(m-1)^2-4\ge0\end{cases}$ 或 $f(2)\le0$

解得：$m\le-1$

例题答案：

1．分析：如果集合 $A=\{a|a$ 具有性质 $p\}$，那么判断对象 a 是否是集合 A 的元素的基本方法就是检验 a 是否具有性质 p。

解：（1）$\because k,k-1\in Z$ 且 $2k-1=k^2-(k-1)^2$，故 $2k-1\in A$；

（2）假设 $4k-2\in A\ \ (k\in Z)$，则存在 $x,y\in Z$，使 $4k-2=x^2-y^2$

即 $(x-y)(x+y)=2(2k-1)$　　　　　　(*)

由于 $x-y$ 与 $x+y$ 具有相同的奇偶性，所以（*）式左边有且仅有两种可能：奇数或 4 的倍数，另一方面，（*）式右边只能被 4 除余 2 的数，故（*）式不能成立。由此，$4k-2\notin A\ \ (k\in Z)$。

2．解：由④若 x，$y\in P$,则 $x+y\in P$ 可知，若 $x\in P$，则 $kx\in P\ (k\in N)$

（1）由①可设 x，$y\in P$，且 $x>0$，$y<0$，则 $-yx=|y|x\quad (|y|\in N)$

故 $xy,-yx\in P$,由④,$0=(-yx)+xy\in P$。

（2）$2\notin P$。若 $2\in P$，则 P 中的负数全为偶数，不然的话，当 $-(2k+1)\in P\ (k\in N)$ 时，$-1=(-2k-1)+2k\in P$，与③矛盾。于是，由②知 P 中必有正奇数。设 $-2m,2n-1\in P\ (m,n\in N)$，我们取适当正整数 q，使 $q\cdot|-2m|>2n-1$，则负奇数 $-2qm+(2n-1)\in P$。前后矛盾。

3．证明：设任意的 $r\in Q$，$r\neq0$,由②知 $r\in S$，或 $-r\in S$ 之一成立。再由①，若 $r\in S$，则 $r^2\in S$；若 $-r\in S$，则 $r^2=(-r)\cdot(-r)\in S$。总之，$r^2\in S$。

取 $r=1$，则 $1\in S$。再由①，$2=1+1\in S$，$3=1+2\in S$，…，可知全体正整数都属于 S。

设 $p,q\in S$，由① $pq\in S$，又由前证知 $\frac{1}{q^2}\in S$，所以 $\frac{p}{q}=pq\cdot\frac{1}{q^2}\in S$。因此，$S$ 含有全体正有理数。

再由①知，0 及全体负有理数不属于 S。即 S 是由全体正有理数组成的集合。

4．解：（1）设任意 $x_0\in A$，则 $x_0=f(x_0)$.而 $f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$

故 $x_0\in B$,所以 $A\subseteq B$.

（2）因 $A=\{-1,3\}$，所以

$$\begin{cases}(-1)^2+a\cdot(-1)+b=-1\\ 3^2+a\cdot 3+b=3\end{cases}$$ 解得 $a=-1, b=-3$

故 $f(x)=x^2-x-3$。由 $x=f[f(x)]$ 得

$$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-x-3=0$$

解得 $x=-1, 3, \pm\sqrt{3}$

$B=\{-1,3,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$。

5．证明：（1）若 $x\in S_i, y\in S_j$，则

$y-x\in S_k, (y-x)-y=-x\in S_i$

所以每个集合中均有非负元素。

当三个集合中的元素都为零时，命题显然成立。

否则，设 S_1, S_2, S_3 中的最小正元素为 a，不妨设 $a\in S_1$，设 b 为 S_2, S_3 中最小的非负元素，不妨设 $b\in S_2$，则 $b-a\in S_3$。

若 $b>0$，则 $0\leqslant b-a<b$，与 b 的取法矛盾。所以 $b=0$。

任取 $x\in S_1$，因 $0\in S_2$，故 $x-0=x\in S_3$。所以 $S_1\subseteq S_3$，同理 $S_3\subseteq S_1$。

所以 $S_1=S_3$。

（3）可能。例如 $S_1=S_2=$\{奇数\}，$S_3=$\{偶数\}显然满足条件，S_1 和 S_2 与 S_3 都无公共元素。

6．解：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$。$A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组

（Ⅰ）$\begin{cases}ax+y=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$　　（Ⅱ）$\begin{cases}x+ay=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

的解集。由（Ⅰ）解得（x, y）=（0，1）=（$\dfrac{2a}{1+a^2}$，$\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$）；由（Ⅱ）解得

（x, y）=（1，0），（$\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$，$\dfrac{2a}{1+a^2}$）

（1）使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素的情况只有两种可能：

① $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1\end{cases}$ ② $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0\end{cases}$

由①解得 a=0；由②解得 a=1。

故 a=0 或 1 时，$(A\bigcup B)\bigcap C$恰有两个元素。

（2）使$(A\bigcup B)\bigcap C$恰有三个元素的情况是：$\dfrac{2a}{1+a^2}=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$

解得$a=-1\pm\sqrt{2}$，故当$a=-1\pm\sqrt{2}$时，$(A\bigcup B)\bigcap C$恰有三个元素。

7．证明：由题设，{1，2，3，…，n}的任何元素必属于且只属于它的真子集A,B之一。

假设结论不真，则存在如题设的{1，2，3，…，n}的真子集A,B，使得无论是A还是B中的任两个不同的数的和都不是完全平方数。

不妨设 1∈A，则 3$\notin A$，否则 1+3=2^2，与假设矛盾，所以 3∈B。同样 6$\notin B$，所以 6∈A，这时 10$\notin A$，，即 10∈B。因 n≥15，而 15 或者在A中，或者在B中，但当 15∈A时，因 1∈A，1+15=4^2，矛盾；当 15∈B时，因 10∈B，于是有 10+15=5^2，仍然矛盾。因此假设不真。即结论成立。

§4 函数的基本性质

函数的性质通常是指函数的定义域、值域、解析式、单调性、奇偶性、周期性、对称性等等，在解决与函数有关的(如方程、不等式等)问题时，巧妙利用函数及其图象的相关性质，可以使得问题得到简化，从而达到解决问题的目的.

I．函数的定义

设A，B都是非空的数集，f是从A到B的一个对应法则.那么，从A到B的映射f：A→B就叫做从A到B的函数.记做$y=f(x)$，其中$x\in A$，$y\in B$，原象集合，A叫做函数$f(x)$的定义域，象的集合C叫做函数的值域，显然$C\subseteq B$.

II．函数的性质

（1）奇偶性 设函数f(x)的定义域为D，且D是关于原点对称的数集.若对任意的$x\in D$，都有$f(-x)=-f(x)$，则称f(x)是奇函数；若对任意的$x\in D$，都有$f(-x)=f(x)$,则称f(x)是偶函数.

（2）函数的增减性 设函数$f(x)$在区间D′上满足：对任意$x_1, x_2\in D'$，并且$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$),则称$f(x)$在区间D′上的增函数（减函数），区间D′称为$f(x)$的一个单调增（减）区间.

III．函数的周期性

对于函数$f(x)$,如果存在一个不为零的正数T，使得当x取定义域中的每个数时，$f(x+T)=f(x)$总成立，那么称$f(x)$是周期函数，T称做这个周期函数的周期.如果函数$f(x)$的所有周期中存在最小值T_0，称T_0为周期函数$f(x)$的最小值正周期.

例题讲解

1．已知$f(x)=8+2x-x^2$，如果$g(x)=f(2-x^2)$，那么$g(x)$(　　)

A.在区间(－2，0)上单调递增　　B.在(0，2)上单调递增

C.在(－1，0)上单调递增 D.在(0，1)上单调递增

2．设$f(x)$是R上的奇函数，且$f(x+3)=-f(x)$，当$0\le x\le \frac{3}{2}$时，$f(x)=x$，则$f(2003)=$(　　)

A.－1　　B.0　　C.1　　D.2003

3．定义在实数集上的函数$f(x)$，对一切实数x都有$f(x+1)=f(2-x)$成立，若$f(x)=0$仅有101个不同的实数根，那么所有实数根的和为(　　)

A.150　　B. $\frac{303}{2}$　　C.152　　D. $\frac{305}{2}$

4．实数x，y满足$x^2=2x\sin(xy)-1$，则$x^{1998}+6\sin^5 y=$______________.

5．已知$x=\sqrt{19}+\sqrt{99}$是方程$x^4+bx^2+c=0$的根，b，c为整数，则$b+c=$__________.

6．已知 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，$f(x)=0$ 有实数根，且 $f(x)=1$ 在(0，1)内有两个实数根，求证：$a>4$.

7．已知 $f(x)=x^2+ax+b(-1\le x\le 1)$，若$|f(x)|$的最大值为 M，求证：$M\ge\frac{1}{2}$.

8．(1)解方程:$(x+8)^{2001}+x^{2001}+2x+8=0$

(2)解方程：$\dfrac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2+1}}=2^{(x-1)^2}$

9．设 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，$f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(3)=3$，求 $\frac{1}{4}[f(4)+f(0)]$的值.

10．设 $f(x)=x^4-4x^3+\frac{13}{2}x^2-5x+2$，当 $x\in R$ 时，求证：$|f(x)|\ge\frac{1}{2}$

课后练习

1. 已知 $f(x)=ax^5+b\sin^5x+1$，且 $f(1)=5$，则 $f(-1)=($　　$)$
   A.3　　B.-3　　C.5　　D.-5

2. 已知$(3x+y)^{2001}+x^{2001}+4x+y=0$，求 $4x+y$ 的值.

3. 解方程：$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{4x^2+1}+2x)+3x=0$

4. 若函数 $y=\log_3(x^2+ax-a)$的值域为 R，则实数 a 的取值范围是______________.

5. 函数 $y=\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2-4x+8}$ 的最小值是______________.

6. 已知 $f(x)=ax^2+bx+c$，$f(x)=x$ 的两根为 x_1，x_2，$a>0$，$x_1-x_2>\frac{1}{a}$，若 $0<t<x_1$，试比较 $f(t)$ 与 x_1 的大小.

7. f(x)，g(x)都是定义在 R 上的函数，当 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$ 时.
   求证：存在实数 x，y，使得

8. 设 a，b，c∈R，$|x|\le 1$，$f(x)=ax^2+bx+c$，如果$|f(x)|\le 1$，求证：$|2ax+b|\le 4$.

9．已知函数 $f(x)=x^3-x+c$ 定义在[0，1]上，x_1，$x_2\in[0，1]$且 $x_1\neq x_2$.

(1)求证：$|f(x_1)-f(x_2)|<2|x_1-x_2|$;

(2)求证：$|f(x_1)-f(x_2)|<1$.

课后练习答案

1.解：∵ $f(1)=a+b\sin^5 1+1=5$

设 $f(-1)=-a+b\sin^5(-1)+1=k$

相加：$f(1)+f(-1)=2=5+k$

∴ $f(-1)=k=2-5=-3$

选 B

2.解：构造函数 $f(x)=x^{2001}+x$，则 $f(3x+y)+f(x)=0$

逐一到 f(x)的奇函数且为 R 上的增函数，

所以 $3x+y=-x$

$4x+y=0$

3.解：构造函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+x$

则由已知得：$f(x)+f(2x)=0$

不难知，f(x)为奇函数，且在 R 上是增函数(证明略)

所以 $f(x)=-f(2x)=f(-2x)$

由函数的单调性，得 $x=-2x$

所以原方程的解为 $x=0$

4.解：函数值域为 R，表示函数值能取遍所有实数，

则其真数函数 $g(x)=x^2+ax-a$ 的函数值应该能够取遍所有正数

所以函数 $y=g(x)$的图象应该与 x 轴相交

即$\triangle\geq0$ ∴ $a^2+4a\geq0$

$a\leq-4$ 或 $a\geq0$

解法二：将原函数变形为 $x^2+ax-a-3^y=0$

$\triangle=a^2+4a+4\cdot3^y\geq0$ 对一切 $y\in R$ 恒成立

则必须 $a^2+4a\geq0$ 成立

∴ $a\leq-4$ 或 $a\geq0$

5.提示：利用两点间距离公式处理

$y=\sqrt{(x+2)^2+(0+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(0-2)^2}$

表示动点 P(x，0)到两定点 A(－2，－1)和 B(2，2)的距离之和

当且仅当 P、A、B 三点共线时取的最小值，为$|AB|=5$

6.解法一：设 $F(x)=f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c$，

$=a(x-x_1)(x-x_2)$

∴ $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)+x$

作差：$f(t)-x_1=a(t-x_1)(t-x_2)+t-x_1$

$=(t-x_1)[a(t-x_2)+1]$

$=a(t-x_1)(t-x_2+\frac{1}{a})$

又 $t-x_2+\frac{1}{a}<t-(x_2-x_1)-x_1=t-x_1<0$

∴ $f(t)-x_1>0$

∴ $f(t)>x_1$

解法二：同解法一得 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)+x$

令 $g(x)=a(x-x_2)$

∵ $a>0$，$g(x)$是增函数，且 $t<x_1$

$\Rightarrow g(t)<g(x_1)=a(x_1-x_2)<-1$

另一方面：$f(t)=g(t)(t-x_1)+t$

∴ $\dfrac{f(t)-t}{t-x_1}=a(t-x_2)=g(t)<-1$

∴ $f(t)-t>x_1-t$

∴ $f(t)>x_1$

7.$|xy-f(x)-g(y)|\geq\dfrac{1}{4}$

证明：(正面下手不容易，可用反证法)

若对任意的实数 x，y，都有$|xy-f(x)-g(y)|<\dfrac{1}{4}$

记$|S(x，y)|=|xy-f(x)-g(y)|$

则$|S(0，0)|<\dfrac{1}{4}$，$|S(0，1)|<\dfrac{1}{4}$，$|S(1，0)|<\dfrac{1}{4}$，$|S(1，1)|<\dfrac{1}{4}$

而 $S(0，0)=-f(0)-g(0)$

$S(0，1)=-f(0)-g(1)$

$S(1，0)=-f(1)-g(0)$

$S(1，1)=1-f(1)-g(1)$

∴ $|S(0，0)|+|S(0，1)|+|S(1，0)|+|S(1，1)|$

$\geq|S(0，0)-S(0，1)-S(1，0)+S(1，1)|$

$=1$

矛盾！

故原命题得证！

8.解：(本题为 1914 年匈牙利竞赛试题)

$f(1)=a+b+c$

$f(-1)=a-b+c$

$f(0)=c$

∴ $a=\dfrac{1}{2}[f(1)+f(-1)-2f(0)]$

$b=\dfrac{1}{2}[f(1)-f(-1)]$

$c=f(0)$

$|2ax+b|=|[f(1)+f(-1)-2f(0)]x+\dfrac{1}{2}[f(1)-f(-1)]|$

$=|(x+\dfrac{1}{2})f(1)+(x-\dfrac{1}{2})f(-1)-2xf(0)|$

$\leq|x+\dfrac{1}{2}||f(1)|+|x-\dfrac{1}{2}||f(-1)|+2|x||f(0)|$

$\leq|x+\dfrac{1}{2}|+|x-\dfrac{1}{2}|+2|x|$

接下来按 x 分别在区间$[-1，-\dfrac{1}{2}]$，$(-\dfrac{1}{2}，0)$，$[0，\dfrac{1}{2})$，$[\dfrac{1}{2}，1]$讨论即可

9. 证明：(1)$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1^3-x_1+x_2^3-x_2|$

$=|x_1-x_2||x_1^2+x_1x_2+x_2^2-1|$

需证明$|x_1^2+x_1x_2+x_2^2-1|<2$ ……………… ①

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+\frac{x_2^2}{2})^2+\frac{3x_2^2}{4}\geq 0$

∴ $-1<x_1^2+x_1x_2+x_2^2-1<1+1+1-1=2$

∴ ①式成立

于是原不等式成立

(2)不妨设 $x_2>x_1$

由(1) $|f(x_1)-f(x_2)|<2|x_1-x_2|$

①若 $x_2-x_1\in(0,\frac{1}{2}]$

则立即有$|f(x_1)-f(x_2)|<1$ 成立.

②若 $1>x_2-x_1>\frac{1}{2}$，则$-1<-(x_2-x_1)<-\frac{1}{2}$

∴ $0<1-(x_2-x_1)<\frac{1}{2}$ (右边变为正数)

下面我们证明$|f(x_1)-f(x_2)|<2(1-x_2+x_1)$

注意到：$f(0)=f(1)=f(-1)=c$

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-f(1)+f(0)-f(x_2)|$

$\leq|f(x_1)-f(1)|+|f(0)-f(x_2)|$

$<2(1-x_2)+2(x_2-0)$ (由(1))

$=2(1-x_2+x_1)$

<1

综合(1)(2)，原命题得证.

10. 已知 $f(x)=ax^2+x-a(-1\leq x\leq 1)$

(1)若$|a|\leq 1$，求证：$|f(x)|\leq\frac{5}{4}$

(2)若 $f(x)_{max}=\frac{17}{8}$，求 a 的值.

解：分析：首先设法去掉字母 a，于是将 a 集中

(1)若 $a=0$，则 $f(x)=x$，

当 $x\in[-1，1]$时，$|f(x)|\leq 1<\frac{5}{4}$成立

若 $a\neq 0$，$f(x)=a(x^2-1)+x$

∴ $|f(x)|=|a(x^2-1)+x|$

$\leq|a||x^2-1|+|x|$

$\leq|x^2-1|+|x|$ (∵ $|a|\leq 1$)

$\leq 1-|x^2|+|x|$

$=\frac{5}{4}-(|x|-\frac{1}{2})^2$

$\leq\frac{5}{4}$

⑵$a=0$ 时，$f(x)=x\le 1\ne \frac{17}{8}$

$\therefore\ a\ne 0$

$\because\ f(x)_{max}=\max\{f(1),\ f(-1),\ f(-\frac{1}{2a})\}$

又 $f(\pm 1)=\pm 1\ne \frac{17}{8}$

$\therefore\ f(x)_{max}=f(-\frac{1}{2a})=\frac{17}{8}$

$a(-\frac{1}{2a})^2+(-\frac{1}{2a})-a=\frac{17}{8}$

$\Rightarrow a=-2$ 或 $a=-\frac{1}{8}$

但此时要求顶点在区间[－1，1]内，应舍去$-\frac{1}{8}$

答案为－2

例题答案：

1．提示：可用图像，但是用特殊值较好一些.选 C

2．解：$f(x+6)=f(x+3+3)=-f(x+3)=f(x)$

∴ $f(x)$的周期为 6

$f(2003)=f(6\times335-1)=f(-1)=-f(1)=-1$

选 A

3．提示：由已知，函数$f(x)$的图象有对称轴 $x=\frac{3}{2}$

于是这 101 个根的分布也关于该对称轴对称.

即有一个根就是$\frac{3}{2}$，其余 100 个根可分为 50 对，每一对的两根关于 $x=\frac{3}{2}$ 对称

利用中点坐标公式，这 100 个根的和等于 $\frac{3}{2}\times100=150$

所有 101 个根的和为 $\frac{3}{2}\times101=\frac{303}{2}$.选 B

4．解：如果 x、y 不是某些特殊值，则本题无法(快速)求解

注意到其形式类似于一元二次方程，可以采用配方法

$(x-sin(xy))^2+cos^2(xy)=0$

∴ $x=sin(xy)$ 且 $cos(xy)=0$

∴ $x=sin(xy)=\pm1$

∴ $siny=1$ $xsin(xy)=1$

原式＝7

5．解：(逆向思考：什么样的方程有这样的根？)

由已知变形得 $x-\sqrt{19}=\sqrt{99}$

∴ $x^2-2\sqrt{19}x+19=99$

即 $x^2-80=2\sqrt{19}x$

再平方得 $x^4-160x^2+6400=76x^2$

即 $x^4-236x^2+6400=0$

∴ b＝－236，c＝6400

b＋c＝6164

6．证法一：由已知条件可得

$$\begin{cases}\triangle=b^2-4ac\ge0 & ①\\ f(1)=a+b+c>1 & ②\\ f(0)=c>1 & ③\\ 0<-\frac{b}{2a}<1 & ④\end{cases}$$

$b^2\ge4ac$

$b>1-a-c$

$c>1$

$b<0$(∵ $a>0$)

于是$-b\geq 2\sqrt{ac}$

所以 $a+c-1>-b\geq 2\sqrt{ac}$

∴ $(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2>1$

∴ $\sqrt{a}-\sqrt{c}>1$

于是$\sqrt{a}>\sqrt{c}+1>2$

∴ $a>4$

证法二：设 f(x)的两个根为 x_1，x_2，

则 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

$f(1)=a(1-x_1)(1-x_2)>1$

$f(0)=ax_1x_2>1$

由基本不等式

$x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)\leq[\frac{1}{4}(x_1+(1-x_1)+x_2+(1-x_2))]^4=(\frac{1}{4})^2$

∴ $\frac{a^2}{16}\geq a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)>1$

∴ $a^2>16$

∴ $a>4$

7．解：$M=|f(x)|_{max}=\max\{|f(1)|，|f(-1)|，|f(-\frac{a}{2})|\}$

(1)若$|-\frac{a}{2}|\geq 1$　(对称轴不在定义域内部)

则 $M=\max\{|f(1)|，|f(-1)|\}$

而 $f(1)=1+a+b$

$f(-1)=1-a+b$

$|f(1)|+|f(-1)|\geq|f(1)+f(-1)|=2|a|\geq 4$

则$|f(1)|$和$|f(-1)|$中至少有一个不小于 2

∴ $M\geq 2>\frac{1}{2}$

(2)$|-\frac{a}{2}|<1$

$M=\max\{|f(1)|，|f(-1)|，|f(-\frac{a}{2})|\}$

$=\max\{|1+a+b|，|1-a+b|，|-\frac{a^2}{4}+b|\}$

$=\max\{|1+a+b|，|1-a+b|，|-\frac{a^2}{4}+b|，|-\frac{a^2}{4}+b|\}$

$\geq\frac{1}{4}(|1+a+b|+|1-a+b|+|-\frac{a^2}{4}+b|+|-\frac{a^2}{4}+b|)$

$\geq\frac{1}{4}[(1+a+b)+(1-a+b)-(-\frac{a^2}{4}+b)-(-\frac{a^2}{4}+b)]$

$=\frac{1}{4}(2+\frac{a^2}{2})$

$\geq\frac{1}{2}$

综上所述，原命题正确.

8．⑴解：原方程化为$(x+8)^{2001}+(x+8)+x^{2001}+x=0$

即$(x+8)^{2001}+(x+8)=(-x)^{2001}+(-x)$

构造函数 $f(x)=x^{2001}+x$

原方程等价于 $f(x+8)=f(-x)$

而由函数的单调性可知 f(x)是 R 上的单调递增函数

于是有 $x+8=-x$

$x=-4$ 为原方程的解

⑵两边取以 2 为底的对数得

$$\log_2\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2+1}}=(x-1)^2$$

即$\log_2(2x+\sqrt{4x^2+1})-\log_2(x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2+1})=x^2-2x+1$

即$\log_2(2x+\sqrt{4x^2+1})+2x=\log_2(x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2+1})+(x^2+1)$

构造函数$f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})+x$

于是 $f(2x)=f(x^2+1)$

易证：f(x)世纪函数，且是 R 上的增函数，

所以：$2x=x^2+1$

解得：$x=1$

9．解：由已知，方程 $f(x)=x$ 已知有三个解，设第四个解为 m，

记 $F(x)=f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)(x-m)$

∴ $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-m)+x$

$f(4)=6(4-m)+4$

$f(0)=6m$

∴ $\frac{1}{4}[f(4)+f(0)]=7$

10．证明：配方得：

$f(x)=x^2(x-2)^2+\frac{5}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}$

$=x^2(x-2)^2+\frac{5}{2}(x-1)^2-1+\frac{1}{2}$

$=(x^2-2x)^2+\frac{5}{2}(x-1)^2-1+\frac{1}{2}$

$=[(x-1)^2-1]^2+\frac{5}{2}(x-1)^2-1+\frac{1}{2}$

$=(x-1)^4-2(x-1)^2+1+\frac{5}{2}(x-1)^2-1+\frac{1}{2}$

$=(x-1)^4+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$

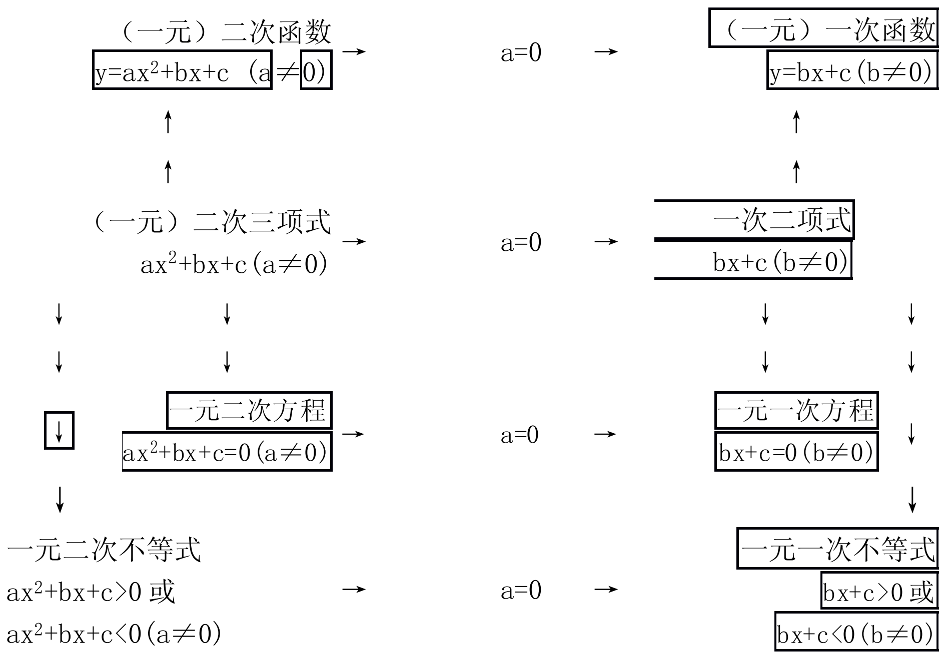
$\geq\frac{1}{2}$

§5 二次函数(1)

二次函数是最简单的非线性函数之一，而且有着丰富内涵。在中学数学数材中，对二次函数和二次方程，二次三项式及二次不等式以及它们的基本性质，都有深入和反复的讨论与练习。它对近代数学，乃至现代数学，影响深远，为历年来高考数学考试的一项重点考查内容，历久不衰，以它为核心内容的重点试题，也年年有所变化，不仅如此，在全国及各地的高中数学竞赛中，有关二次函数的内容也是非常重要的命题对象。因此，必须透彻熟练地掌握二次函数的基本性质。

学习二次函数的关键是抓住顶点（-b/2a，(4ac-b^2)/4a），顶点的由来体现了配方法（$y=ax^2+bx+c=a(x+b/2a)^2+(4ac-b^2)/4a$）；图象的平移归结为顶点的平移（$y=ax^2\to y=a(x-h)^2+k$）；函数的对称性（对称轴 x=-b/2a，f（-b/2a+x)=f（-b/2a-x)，x∈R），单调区间（-∞，-b/2a），[-b/2a,+∞]、极值（(4ac-b^2)/4a），判别式（Δb^2-4ac）与 X 轴的位置关系（相交、相切、相离）等，全都与顶点有关。

一、“四个二次型”概述



观察这个框图，就会发现：在 a≠0 的条件下，从二次三项式出发，就可派生出一元二次函数，一元二次方程和一元二次不等式来。故将它们合称为“四个二次型”。其中二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 像一颗心脏一样，支配着整个“四个二次型”的运动脉络。而二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，犹如“四个二次型”的首脑或统帅：它的定义域即自变量 X 的取值范围是全体实数，即 $n\in R$；它的解析式 $f(x)$ 即是二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$；若 $y=0$，即 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），就是初中重点研究的一元二次方程；若 $y>0$ 或 $y<0$，即 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$（$a\neq0$），就是高中一年级重点研究的一元二次不等式，它总揽全局，是“四个二次型”的灵魂。讨论零值的一元二次函数即一元二次方程是研究“四个二次型”的关键所在，它直接影响着两大主干：一元二次方程和一元二次不等式的求解。一元二次方程的根可看作二次函数的零点；一元二次不等式的解集可看作二次函数的正、负值区间。心脏、头脑、关键、主干、一句话，“四个二次型”联系密切，把握它们的相互联系、相互转化、相互利用，便于寻求规律，灵活运用，使学习事半功倍。

二、二次函数的解析式

上面提到，“四个二次型”的心脏是二次三项式：二次函数是通过其解析式来定义的（要特别注意二次项系数 $a\neq0$）；二次函数的性质是通过其解析式来研究的。因此，掌握二次函数首先要会求解析式，进而才能用解析式去解决更多的问题。

$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$中有三个字母系数 a、b、c，确定二次函数的解析式就是确定字母 a、b、c 的取值。三个未知数的确定需要 3 个独立的条件，其方法是待定系数法，依靠的是方程思想及解方程组。

二次函数有四种待定形式：

1．标准式（定义式）：$f(x)=ax^2+bx+c$. (a≠0)
2．顶点式：　　　　　$f(x)=a(x-h)^2+k$. (a≠0)
3．两根式（零点式）：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$．(a≠0)
4．三点式：（见罗增儒《高中数学竞赛辅导》）

过三点 A（$x_1,f(x_1)$）、B（$x_2,f(x_2)$）、C（$x_3,f(x_3)$）的二次函数可设为

$f(x)=a_1(x-x_2)(x-x_3)+a_2(x-x_1)(x-x_3)+a_3(x-x_1)(x-x_2)$把 ABC 坐标依次代入，即令 $x=x_1,x_2,x_3$,得

$$f(x_1)=a_1(x_1-x_2)(x_1-x_3),$$
$$f(x_2)=a_2(x_2-x_1)(x_2-x_3),$$
$$f(x_3)=a_3(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

解之，得：$a_1=f(x_1)/ (x_1-x_2)(x_1-x_3)$，$a_2=f(x_2)/ (x_2-x_1)(x_2-x_3)$，$a_3=f(x_3)/ (x_3-x_1)(x_3-x_2)$

从而得二次函数的三点式为：

$$f(x)=[f(x_1)/(x_1-x_2)](x_1-x_3)(x-x_2)(x-x_3)+[f(x_2)/ (x_2-x_1)(x_2-x_3)](x-x_1)(x-x_3)+[f(x_3)/(x_3-x_1)(x_3-x_2)](x-x_1)(x-x_2)$$

根据题目所给的不同条件，灵活地选用上述四种形式求解二次函数解析式，将会得心应手。

例题讲解

元素与集合的关系

1. 集合 $A=\{y\,|\,y=x^2+2x+4\}$，$B=\{y\,|\,y=ax^2-2x+4a\}$，$A\subseteq B$，求实数 a 的取值集合．

2. 考察所有可能的这样抛物线 $y=x^2+ax-b^2$，它们与坐标轴各有三个不同的交点，对于每一条这样的抛物线，过其与坐标轴的三个交点作圆．证明：所有这些圆周经过一定点．

3. 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的顶点位于区域 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1.0\le y\le 1\}$ 内部或边界上，求 b、c 的取值范围.

4. 设 $x=p$ 时，二次函数 $f(x)$ 有最大值 5，二次函数 $g(x)$ 的最小值为－2，且 $p>0$，$f(x)+g(x)=x^2+16x+13, g(p)=25$．求 $g(x)$ 的解析式和 p 值.

5. 已知 0≤x≤1，$f(x)=x^2-ax+\dfrac{a}{2}\ (a>0)$，$f(x)$ 的最小值为 m.

（1）用 a 表示 m；（2）求 m 的最大值及此时 a 的值.

6．函数 $f(x)=-3x^2-3x+4m^2+\dfrac{9}{4}$，$x\in[-m,1-m]$,该函数的最大值是 25,求该函数取最大值时自变量的值.

7．一幢 k（>2）层楼的公寓有一部电梯，最多能容纳 k－1 个人，现有 k－1 个学生同时在第一层楼乘电梯，他们中没有两人是住同一层楼的．电梯只能停一次．停在任意选择的一层．而对每一个学生而言，自已往下走一层感到一分不满意，而往上走一层感到 2 分不满意，问电梯停在哪一层，可使不满意的总分达到最小？

8．已知方程 $(ax+1)^2=a^2(1-x^2)$，其中 a>1，证明：方程的正根比 1 小，负根比 －1 大.

9．若抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与连接两点 M（0，1），N（2，3）的线段（包括 M、N 两点）有两个相异的交点，求 a 的取值范围．

10．设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4\geqslant 2$，且 $x_2+x_3+x_4\geqslant x_1$，证明：$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\leq 4x_1x_2x_3x_4$

11．定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x^2+2x$．另一个函数 $y=g(x)$ 的定义域为 $[a,b]$,值域为 $[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$,其中 $a\neq b$, a、$b\neq 0$．在 $x\in[a,b]$上，$f(x)=g(x)$．问:是否存在实数 m,使集合 $\{(x,y)\mid y=g(x),x\in[a,b]\}\cap\{(x,y)\mid y=x^2+m\}$ 恰含有两个元素?

课后练习

1. 已知二次函数的图象过（－1,－6），（1，－2）和（2,3）三点，求二次函数的解析式。

2．二次函数的图象通过点（2，－5），且它的顶点坐轴为（1，－8），求它的解析式

3．已知二次函数的图象过（－2,0）和（3,0）两点，并且它的顶点的纵坐标为125/4，求它的解析式。

4．已知二次函数经过3点A（1/2，3/4）、B（－1,3）、C（2,3），求解析式。

5．当X为何值时，函数$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$取最小值。

6. 已知x_1,x_2是方程$x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ （k为实数)的两个实数根，$x_1^2+x_2^2$的最大值是：(　　)

（A）19；　　（B）18；　　（C）50/9　　(D)不存在

7．已知$f(x)=x^2-2x+2$，在$x\in[t,t+1]$上的最小值为$g(t)$，求$g(t)$的表达式。

8．（1）当$x^2+2y^2=1$时，求$2x+3y^2$的最值；

（2）当$3x^2+2y^2=6x$时，求x^2+y^2的最值。

课后练习答案

1. [解法一]：用标准式

∵图象过三点（－1,－6）、（1，－2）、（2,3）

∴可设 $y=f(x)=ax^2+bx+c$，且有 $a-b+c=-6$ ①，$a+b+c=-2$ ②，$4a+2b+c=3$ ③

解之得：$a=1$，$b=2$，$c=-5$

∴所求二次函数为 $y=x^2+2x-5$

[解法二]：用三点式

∵图象过三点（－1，－6），（1，－2），（2,3）

∴可设 $y=a_1(x-x_2)(x-x_3)+a_2(x-x_1)(x-x_3)+a_3(x-x_1)(x-x_2)=(a_1+a_2+a_3)x^2-$

$[a_1(x_2+x_3)+a_2(x_1+x_3)+a_3(x_1+x_2)]x+(a_1x_2x_3+a_2x_1x_3+a_3x_1x_2)$

计算可得：$a_1=-6/(-1-1)(-1-2)=-1$，
$a_2=-2/(1+1)(1-2)=1$，
$a_3=3/(2+1)(2-1)=1$

∴$f(x)=x^2+2x-5$

2. 解：∵它的顶点坐标已知

∴可设 $f(x)=a(x-1)^2-8$ ，又函数图象通过点（2，－5），

∴$a(2-1)^2-8=-5$ ，解之，得 $a=3$

故所求的二次函数为：$y=3(x-1)^2-8$

即：$y=f(x)=3x^2-6x-5$

[评注]，以顶点坐标设顶点式 $a(x-h)^2+k$，只剩下二次项系数 a 为待定常数，以另一条件代入得到关于 a 的一元一次方程求 a，这比设标准式要来得简便得多。

3. 解：∵（−2,0）和（3,0）是 X 轴上的两点，

∴$x_1=-2$，$x_2=3$ 可设 $y=f(x)=a(x+2)(x-3)$
$=a(x^2-x-6)=a[(x-1/2)^2-25/4]=a(x-1/2)^2-25/4a$

它的顶点的纵坐标为$-25/4a$，∴$-25/4a=125/4$，$a=-5$

故所求的二次函数为：$f(x)=-5(x+2)(x-3)=-5x^2+5x+30$

[想一想]：本例能否用顶点式来求？

4. [分析]本例当然可用标准式、三点式求解析式，但解方程组与求 a_1、a_2、a_3 计算较繁。仔细观察三点坐标特点或画个草图帮助分析，注意到三点的特殊位置，则可引出如下巧解。

[解法一]：顶点式：由二次函数的对称性可知，点 B、C 所连线段的中垂线 $x=(-1+2)/2=1/2$ 即为图象的对称轴，从而点 A（1/2，3/4）必是二次函数的顶点，故可设顶点式:$f(x)=a(x-(1/2))^2+(3/4)$

把 B 或 C 的坐标代入得：$f(-1)=a(-3/2)^2+(3/4)=(9/4)a+(3/4)=3$

解得：$a=1$，∴$f(x)=(x-(1/2))^2+3/4=x^2-x+1$

[解法二]由 B、C 的纵坐标相等可知 B、C 两点是函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=3$ 的交点，亦即 B、C 两点的横坐标是方程 $f(x)=3$ 即 $f(x)-3=0$ 的两个根故可设零点式为：$f(x)-3=a(x+1)(x-2)$

把 A 点坐标代入，有 $f(1/2)-3=a(1/2+1)(1/2-2)$，即$-9/4=-9/4a$，$a=1$

从而 $f(x)=(x+1)(x-2)+3=x^2-x+1$

5. 解：∵$f(x)=(x^2-2a_1x+a_1^2)+(x^2-2a_2x+a_2^2)+\cdots+(x^2-2a_nx+a_n^2)=nx^2-2(a_1+a_2\cdots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$

∴当 $x=((a_1+a_2+\cdots+a_n)/n)$ 时，$f(x)$ 有最小值。

[评注]：1994 年全国普通高考命制了如下一个填空题，在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得 n 次测量分别得到 a_1、a_2、…，a_n 共 n 个数据。我们规定的所测物理量的“最佳近似值”a 是这样一个量：与其它近似值比较，a 与各数据差的平方和最小，依此规定，从 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 推出 a=________读者从 5 的解答中，能否悟到解决此题的灵感？

6. 解：由韦达定理得：$x_1+x_2=k-2$，$x_1x_2=k^2+3k+5$

∴$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)$
$=-k^2-10k-6=-(k+5)^2+19$

如果由此得 K＝-5 时，（$x_1^2+x_2^2$）$_{max}$=19，选（A），那就错了。为什么？已知该 x_1, x_2 是方程的两个“实数”根，即方程必须有实数根才行，而此时方程的判别式Δ≥0，即

$\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)=-3k^2-16k-16\geqslant 0$ ①

解①得：$-4\leqslant k\leqslant -4/3$

∵$k=-5\notin[-4,-4/3]$，设 $f(k)=-(k+5)^2+19$ 则 $f(-4)=18, f(-4/3)=50/9<18$

∴当 k=-4 时，$(x_1^2+x_2^2)_{max}=18$，

∴选（B）

[评注]：求二次函数最值时，必须首先考虑函数定义域。否则，审题不慎，忽略“实数”二字，就会掉进题目设置的“陷阱”中去了。

7. 解：$f(x)=(x-1)^2+1$

(1)当 $t+1<1$ 即 $t<0$ 时，$g(t)=f(t+1)=t^2+1$

(2)当 $t\leqslant 1\leqslant t+1$，即 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$g(t)=f(1)=1$

(3)当 $t>1$ 时，$g(t)=f(t)=t^2-2t+2$

综合（1）、（2）、（3）得：$g(t)=\begin{cases} t^2+1, t<0 \\ 1, \quad 0\leq t\leq 1 \\ t^2-2t+2, t>1 \end{cases}$

8. 解：(1)由 $x^2+2y^2=1$ 得 $y^2=1/2(1-x^2)$，代入 $2x+3y^2=2x+(3/2)(1-x^2)=(-(3/2))(x-(2/3))^2+(13/6)$

又 $1-x^2=2y^2\geqslant 0$，∴$x^2\leqslant 1$，$-1\leqslant x\leqslant 1$

∴当 $x=2/3$ 时，$y=(\sqrt{10})/6$，$(2x+3y^2)_{max}=16/3$；

当 $x=-1$ 时，$y=0$，$(2x+3y^2)_{min}=-2$

(2)由 $3x^2+2y^2=6x$，得 $y^2=(3/2)x(2-x)$，代入 $x^2+y^2=x^2+(3/2)x(2-x)=-1/2(x-3)^2+9/2$

又 $y^2=(3/2)x(2-x)\geqslant 0$，得 $0\leqslant x\leqslant 2$

当 $x=2$，$y=0$ 时，$(x^2+y^2)_{max}=4$；当 $x=0$，$y=0$ 时，$(x^2+y^2)_{min}=0$

例题答案：

1．解：A、B分别表示函数 $y=x^2+2x+4$ 与函数 $y=ax^2-2x+4a$ 的值域．由 $x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geqslant 3$ 知 A=[3，＋∞）．而 B 受参数 a 的影响，要进行讨论．

a=0 时，$y=-2x$，值域是 R 符合条件 $A\subseteq B$．

$a\neq 0$ 时，$f(x)=ax^2-2x+4a$ 是二次函数，如果 a＜0，该函数的值域为 $\left(-\infty,4a-\dfrac{1}{a}\right]$，这时 $A\ B$ 不成立．如果 a＞0 时，由[3，＋∞]$\subseteq$[$4a-\dfrac{1}{a}$，＋∞],得 $\begin{cases}a>0\\4a-\dfrac{1}{a}\leq 3\end{cases}$ ∴ 0＜a≤1

综上所述，a 的可取值集合为{a|0≤a≤1}。

说明：参数 a 的取值决定了函数 $f(x)=ax^2-2x+4a$ 的类别及性质，因而对该函数的值域有影响．为了由 $A\subseteq B$ 求出 a 的允许值范围，必须对参数 a 分情况讨论．

2．证明：设抛物线 $y=x^2+ax-b^2$ 与 x 轴的交点为（x_1，0）、（x_2，0）．由韦达定理知

$x_1\cdot x_2=-b^2<0$ (因为 b=0,则 $y=x^2+ax$ 与坐标轴只有两个不同的交点),故点（x_1，0）、（x_2，0）在坐标原点的两侧．又因为 $|x_1|\cdot|x_2|=|-b^2|\cdot 1$，由相交弦定理的逆定理知，点（$x_1$，0）、（$x_2$，0）、（0，$-b^2$），（0，1）在同一个圆周上，即过抛物线与坐标轴的三个交点（x_1，0）、（x_2，0）、（0，$-b^2$）的圆一定过定点（0，1）．于是所有的这些圆周均经过一定点（0，1）．

3．解：抛物线的顶点坐标为（$-\frac{b}{2},\frac{4c-b^2}{4}$），故 $\begin{cases}0\le -\frac{b}{2}\le 1\\ 0\le \frac{4c-b^2}{4}\le 1\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}-2\le b\le 0\\ \frac{b^2}{4}\le c\le \frac{b^2}{4}+1\end{cases}$,

上式即为 b、c 的取值范围.

4．解：由题设 $f(p)$=5，$g(p)$=25，$f(p)+g(p)=p^2+16p+13$，所以 $p^2+16p+13$=30，解得 p=1 （p= －17 舍去）．由于 $f(x)$ 在 x=1 时有最大值 5，故设

$f(x)=a(x-1)^2+5, a<0$

所以 $g(x)=x^2+16x+13-f(x)=(1-a)x^2+2(a+8)x+8-a$，因 $g(x)$ 的最小值为－2，故 $\frac{4(1-a)(8-a)-4(a+3)^2}{4(1-a)}=-2$,所以 $a=-2$．从而 $g(x)=3x^2+12x+10$．

5．解：（1）把 $f(x)$ 改写成 $f(x)=(x-\frac{a}{2})^2+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}$．于是知 $f(x)$ 是顶点为（$\frac{a}{2},\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}$），开口向上的抛物线．又因为 $x\in[0,1]$,故当 0＜$\frac{a}{2}$≤1，即 0＜a≤2 时，$f(x)$ 的最小值为

$f(\frac{a}{2})=\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}$；

当 $\frac{a}{2}$＞1,即 a＞2 时，$f(x)$ 有最小值 $f(1)=1-\frac{a}{2}$．于是 $m=\begin{cases}\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}, & (0<a\le 2)\\ 1-\frac{a}{2}, & (a>2)\end{cases}$

（2）当 a＞2 时，$1-\frac{a}{2}$ 的值小于 0，而当 0＜a≤2 时，$\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}=-\frac{1}{4}(a-1)^2+\frac{1}{4}$，它的最大值

为$\frac{1}{4}$（当a=1 时取得），故m的最大值为$\frac{1}{4}$，此时a=1.

说明：对于某些在给定区间上的二次函数最值问题，往往需要把顶点和区间端点结合起来考虑.

6．分析：限定在区间$[-m,1-m]$上的函数的最大值要考虑到在这个区间上的单调情况．当x可取任意实数时，二次函数$-3x^2-3x+4m^2+\frac{9}{4}$的图象是对称轴为$x=-\frac{1}{2}$开口向下的抛物线，$-\frac{1}{2}$与区间$[-m,1-m]$的位置关系决定了已知函数的单调状况，因此要分区间讨论.

当$-\frac{1}{2}\in[-m,1-m]$,即$\frac{1}{2}\le m\le\frac{3}{2}$时,最大值应是$f(-\frac{1}{2})=4m^2+3$．由$4m^2+3$=25,

$m^2=\frac{11}{2}$得$|m|=\frac{\sqrt{22}}{2}$,不符合$\frac{1}{2}\le m\le\frac{3}{2}$的条件．可见$m\notin[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$.

当$-\frac{1}{2}>1-m$,即$m>\frac{3}{2}$时，函数$f(x)=-3x^2-3x+4m^2+\frac{9}{4}$，$x\in[-m,1-m]$是增函数，可见$f(1-m)=m^2+9m-\frac{15}{4}=25$，解之得$m=\frac{5}{2}$或$m=-\frac{23}{2}$．其中$m=-\frac{23}{2}$不合$m>\frac{3}{2}$的条件，舍去．可见$1-m=1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$.

当$-\frac{1}{2}<-m$，即$m<\frac{1}{2}$时,函数$f(x)=-3x^2-3x+4m^2+\frac{9}{4}$是$[-m,1-m]$是减函数，可见$f(-m)=m^2+3m+\frac{9}{4}=25$,解之得$m=\frac{7}{2}$或$m=-\frac{13}{2}$．其中$m=\frac{7}{2}$不合$m<\frac{1}{2}$的条件,舍去,由此知$m=-\frac{13}{2}$.　综上所述,当$x=-\frac{3}{2}$或$x=\frac{13}{2}$时，函数$f(x)$有最大值 25.

说明：由点$-\frac{1}{2}$与区间$[-m,1-m]$的位置关系引起的分类讨论是“形”对“数”的引导作用．本题中虽然只是求函数取最大值时的自变量x的值，没有问m的值，但这个x值与m值有直接关系，所以要先求m再求x.

7．解：设电梯停在第x层，则不满意的总分为S=（1+2+⋯+x－2）+2（1+2+⋯+$k-x$）$=\frac{1}{2}[3x^2-(4k+5)x]+k^2+k+1$,所以当$x=N(\frac{4k+5}{6})$时，$S$最小，其中$N(a)$表示最接近于$a$的整数．例如$N(3)=3, N(3.6)=4, N(2.1)=2, N(2.5)=2或3$,故当电梯停在$N(\frac{4k+5}{6})$时，不满意总分最小.

8．证明：原方程整理后，得$2a^2x^2+2ax+1-a^2=0$，令$f(x)=2a^2x^2+2ax+1-a^2$，则$f(x)$是开口向上的抛物线，且$f(0)=1-a^2<0$，故此二次函数$f(x)=0$有一个正根，一个负根．要证明正根比 1 小，只须证$f(1)>0$，要证明负根比 －1 大，只须证$f(-1)>0$．因为

$f(1)=2a^2+2a+1-a^2=(a+1)^2>0$
$f(-1)=2a^2-2a+1-a^2=(a-1)^2>0$ 从而命题得证.

9．解：易知过两点（0，1）、（2，3）的直线方程为 $y=x+1$，而抛物线 $y=x^2+ax+2$ 与线段 MN 有两个交点就是方程 $x^2+ax+2=x+1$ 在区间[0，2]上有两个有两个不等的实根．令 $f(x)=x^2+(a-1)x+1$．则 $\begin{cases}0<\frac{a-1}{2}<2,\Delta=(a-1)^2-4>0\\ f(0)=1\geq 0,f(2)=2a+3\geq 0\end{cases}$ 解得 a 的范围为 $-\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant-1$．

说明：利用二次函数来研究一元二次方程的根的分布是非常有效的手段．

10．证明：令 $a=x_2+x_3+x_4,b=x_2x_3x_4$，则原不等式为 $(x_1+a)^2\leq 4x_1b$，即

$x_1^2+2(a-2b)x_1+a^2=0$，令 $f(x)=x^2+2(a-2b)x+a^2$，则只需证明 $f(x_1)\leqslant 0$．因

$\Delta=4(a-2b)^2-4a^2=16b(b-a)$，而 $\frac{a}{b}=\frac{x_2+x_3+x_4}{x_2x_3x_4}=\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_4}+\frac{1}{x_2x_4}\leqslant$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}<1$，所以 $b>a$，从而 $\Delta>0$，$f(x)$ 与 x 轴有两个不同的交点．易知这两个交点为

$u=2b-a-2\sqrt{b(b-a)}$
$v=2b-a+2\sqrt{b(b-a)}$，下证 $x_1\in[u,v]$．　　$a\leq 3x_1\leq 3a,\ \therefore x_1\in[\frac{a}{3},a]$，只需证

$[\frac{a}{3},a]\subset[u,v]$，即 $u\leq\frac{a}{3},a\leq v$，由于 $v=2b-a+2\sqrt{b(b-a)}\geq 2b-a\geq a$，

$$u=2b-a-2\sqrt{b(b-a)}=(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^2=(\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{b-a}})^2=\frac{a}{(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}-1})^2}\leq\frac{a}{(\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}})^2}=\frac{a}{3}$$

所以 $x_1\in[u,v]$，从而必有 $f(x_1)\leqslant 0$．

解法二：只需证明 $f(x_1)\leqslant 0$，而 $\frac{a}{3}\leq x_1\leq a$，因此只需证 $f(a)\leq 0,f(\frac{a}{3})\leq 0$ 而 $f(a)=4a(a-b)$，$f(\frac{a}{3})=\frac{4}{9}a(4a-3b)$，由 $\frac{a}{b}\leq\frac{3}{4}$ 可证得 $f(a)\leq 0,f(\frac{a}{3})\leq 0$

说明：通过构造二次函数，然后利用二次函数的性质来证明一些不等式问题，往往会使问题简化．

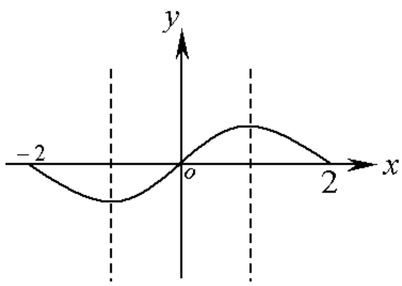
11．分析：$\{(x,y)\mid y=x^2+m\}$ 是以 y 轴为对称轴由 $y=x^2$ 的图象平移所形成的抛物线系．对给定的 m 它表示一条抛物线，条件 $(x,y)\mid y=g(x),x\in[a,b]\bigcap\{(x,y)\mid y=x^2+m\}$ 恰含有两个元素的意思是函数 $y=g(x)$，$x\in[a,b]$ 的图象与抛物线 $y=x^2+m$ 恰有两个交点．首先要弄清楚

$y=g(x)$，$x\in[a,b]$，进而作出它的图象．

容易求出奇函数 $y=f(x)$ 在 $x<0$ 时的解析式是 $f(x)=x^2+2x$．即

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x\ge 0)\\ x^2+2x & (x<0)\end{cases}$$

函数 $y=g(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，值域为 $[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$，其中 $a\ne b$，a、$b\ne 0$，这表明 $\begin{cases}a<b\\ \frac{1}{b}<\frac{1}{a}\end{cases}$



可见 a、b 同号．也就是说 $y=g(x)$，$x\in[a,b]$ 的图象在第一或第三象限内．根据 $f(x)=g(x)$（$x\in[a,b]$ 以及 $f(x)$ 的图象可知，函数 $g(x)$ 的图象如所示曲线的一部分．

值域与函数的单调状况有关，又与定义域有关．如果只考虑 $0<a<b<2$ 或 $-2<a<b<0$ 两种情况，不能准确地用 a、b 表示出值域区间的端点，因此要把区间（0，2），（−2，0）再分细一些，由图中看出，当 a、$b>0$ 时，考虑以下三种情况较好．$0<a<b\le 1$，$0<a<1<b$，$1\le a<b<2$．

如果 $0<a<b\le 1$，那么 $\frac{1}{a}>1$．但是 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)\le 1$，这与 $g(x)$ 的值域区间 $[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$ 的右端点大于 1 矛盾．可见不出现 $0<a<b\le 1$ 的情形．

如果 $1\le a<b<2$，由图看出 $g(x)$ 是减函数，可见 $\begin{cases}\frac{1}{b}=g(b)=-b^2+2b\\ \frac{1}{a}=g(a)=-a^2+2a\end{cases}$ 整理得

$\begin{cases}(a-1)(a^2-a-1)=0\\ (b-1)(b^2-b-1)=0\end{cases}$，考虑到 $1\le a<b<2$ 的条件，解之得 $\begin{cases}a=1\\ b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$．

完全类似地，考虑到 $-1\le a<b<0$，$-2<a<-1<b<0$，$-2<b<a\le -1$ 三种情况后，可以在 $-2<b<a\le -1$ 的情况下通过值域条件得出 $\begin{cases}a=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ b=-1\end{cases}$，这就得到了函数

$$g'(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (1\le x\le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2})\\ x^2+2x & (\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\le x\le -1)\end{cases}$$

对于某个 m，抛物线与函数 $g'(x)$ 的图象有两个交点时，一个交点在第一象限，一个交点在

第三象限．因此，m应当使方程$x^2+m=-x^2+2x$，在[1，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$]内恰有一个实数根，并且使方程$x^2+m=x^2+2x$，在[$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$,-1]内恰有一个实数根．问题归结为求m，使

$$\begin{cases} 2x^2-2x+m=0 & 在[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}]内恰有一个实根\cdots\cdots(1) \\ x=\frac{1}{2}m & 在[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},-1]内恰有一个实根\cdots(2) \end{cases}$$

由（1）得，方程$2x-2x^2=m$在$[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$内恰有一根，设$h(x)=2x-2x^2$，则$h(\frac{1+\sqrt{5}}{2})\le m\le h(1)$即$-2\le m\le 0$，由（2）得$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\le\frac{1}{2}m\le -1$，即$-1-\sqrt{5}\le m\le -2$，∴ $m=-2$．易证，抛物线$y=x^2-2$与函数$g(x)$图象恰有两个交点（$-1,-1$）和（$\frac{\sqrt{5}+1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}$）

综上所述：题目条件下的实数$m=-2$．

说明：解题过程可分为“求函数$y=f(x)$”，“求函数$y=g(x)$”，“求m”三个阶段．求函数$y=g(x)$的关键步骤是求a,b的值．运用了数形结合的方法和分类讨论的运算过程，最终把求m的问题化归到求一次方程和二次方程的一定范围内有解的问题．

可以看出，当$m\in(-2,0)$时,抛物线$y=x^2+m$与函数$y=g(x)$的图象在第一象限内有一个交点,当$m\in\left[-1-\sqrt{5},-2\right)$时,在第三象限内有一个交点．

§6 二次函数(2)

二次方程问题其实质就是其相应二次函数的零点(图象与 x 轴的交点)问题，因此，二次方程的实根分布问题，即二次方程的实根在什么区间内的问题，借助于二次函数及其图象利用形数结合的方法来研究是非常有益的。

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的二实根为 x_1, x_2，($x_1<x_2$)，$\Delta=b^2-4ac$，且α、β(α<β)是预先给定的两个实数。

1．当两根都在区间(α，β)内，方程系数所满足的充要条件：

∵ $\alpha<x_1<x_2<\beta$，对应的二次函数 f (x)的图象有下列两种情形(图 1)

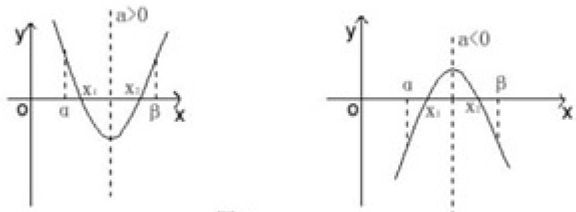


图 1

当 $a>0$ 时的充要条件是：Δ＞0，α＜-b/2a＜β，f(α)＞0，f（β)＞0

当 $a<0$ 时的充要条件是：Δ＞0，α＜-b/2a＜β，f(α)＜0，f（β)＜0

两种情形合并后的充要条件是：

Δ＞0，α＜-b/2a＜β，af(α)＞0，af（β)＞0 ①

2．当两根中有且仅有一根在区间（α，β）内，方程系数所满足的充要条件：

∵ $\alpha<x_1<\beta$ 或 $\alpha<x_2<\beta$，对应的函数 f(x)的图象有下列四种情形（图 2）

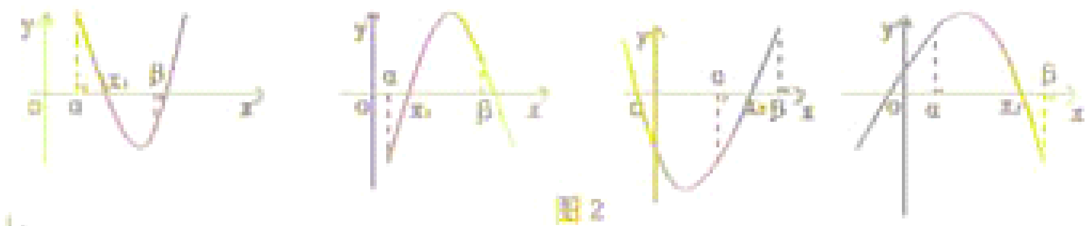


图 2

从四种情形得充要条件是：

f（α)·f（β)＜0 ②

3．当两根都不在区间［α，β］内方程系数所满足的充要条件：

（1）两根分别在区间［α，β］之外的两旁时：

∵ $x_1<\alpha<\beta<x_2$，对应的函数 f(x)的图象有下列两种情形（图 3）：

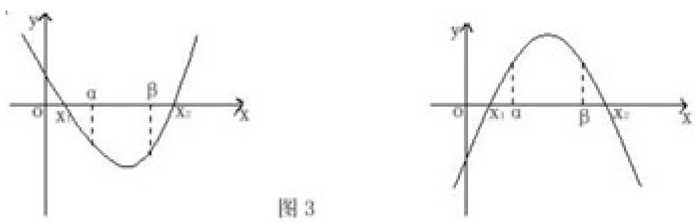


图 3

当 a＞0 时的充要条件是：f（α)＜0，f（β)＜0

当 a＞0 时的充要条件是：f（α)＞0，f（β)＞0

两种情形合并后的充要条件是：

af（α)＜0，af（β)＜0 ③

（2）两根分别在区间［α，β］之外的同旁时：

∵$x_1 < x_2 < \alpha < \beta$ 或 $\alpha < \beta < x_1 < x_2$，对应函数 f(x)的图象有下列四种情形（图 4）：

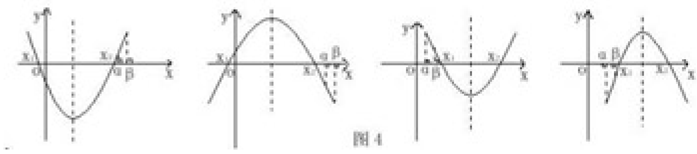


图 4

当 $x_1 < x_2 < \alpha$ 时的充要条件是：

$\Delta > 0$，$-b/2a < \alpha$，$af(\alpha) > 0$ ④

当 $\beta < x_1 < x_2$ 时的充要条件是：

$\Delta > 0$，$-b/2a > \beta$，$af(\beta) > 0$ ⑤

二次函数与二次不等式

前面提到，一元二次不等式的解集相应于一元二次函数的正值、负值区间。解不等式与证明不等式成立，经常要用到二次函数的极值性质、单调性、图象与 x 轴的位置关系等。

例题讲解

1. 已知方程 $x^2+2px+1=0$ 有一个根大于 1，有一个根小于 1，则 P 的取值为__________。

2. 如果方程 $(1-m^2)x^2+2mx-1=0$ 的两个根一个小于零，另一个大于 1，试确定 m 的范围。

3. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$. 若方程 $f(x)=x$ 无实根，求证：方程 $f[f(x)]=x$ 也无实根，

4. 对二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，求证，必存在 $x=\pm M\neq0$，使 $f(\pm M)$ 均与 a 同号。

5. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是实数，求证：$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

6．设二次函数 $f(x)= ax^2+bx+c(a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2<1/a$。

（1）当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明 $x<f(x)<x_1$

（2）设函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称，证明：$x_0<x_1/2$。

7．当 K 为什么实数时，关于 X 的二次方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$ 的两个实根 α 和 β 分别满足 $0<\alpha<1$ 和 $1<\beta<2$？

8．函数 $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$ 在 $[-3,3]$ 上的最小值是________。

课后练习

1．$f(x)$ 是定义在全体实数上的偶函数，它的图象关于 $x=2$ 为轴对称，已知当 $x\in(-2,2]$ 时 $f(x)$ 的表达式为 $-x^2+1$，则当 $x\in(-6,-2)$ 时，$f(x)$ 的表达式是：(A) $-x^2+1$，（B）$-(x-2)^2+1$，(C) $-(x+2)^2+1$，（D）$-(x+4)^2+1$。 （　　）

2．已知 $x^2-4x+b=0$ 的一个根的相反数为 $x^2+4x-b=0$ 的根，则 $x^2+bx-4=0$ 的正根为________。

3． 已知$f(x)=x^2+(lga+2)x+lgb$且$f(-1)=-2$，又$f(x)\geqslant 2x$对一切x∈R都成立，求$a+b$=?

4．设θ∈[0, π]，关于x的方程$x^2-2|x|\cos\theta+1=0$有实根，则$4x^2+13|x|+23$=______。

5．已知方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有实根x_1与x_2，设$P=x_1^{2002}+x_2^{2002}$, $q=x_1^{2001}+x_2^{2001}$, $r=x_1^{2000}+x_2^{2000}$则$ap+bq+cr$=________。

6．若二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$满足$f(x+2)=f(2-x)$，那么$f(0)$,$f(-2002)$,$f(2002)$的大小关系是（A）$f(0)<f(2002)<f(-2002)$，(B)$f(2002)<f(0)<f(-2002)$，(C)$f(-2002)<f(0)<f(2002)$，(D)$f(-2002)<f(2002)<f(0)$

7．若$sin^2x+cosx+a=0$有实根，试确定实数a的取值范围是什么？

8．已知x,y都是实数，$C=x^2+y^2-xy-x+y$，则C的最小值等于__________。

9．代数式$2x^2+2xy+2y^2+2x+4y+5$的最小值为：（A）0 （B）5 （C）9/2 （D）3

10．函数$f(x)=x^4-2x^2+2$的单调增区间是：（A）[1,+∞)，（B）(-∞,-1)∪[1,+∞)，(C)[-1,0]∪[1,+∞)，(D)以上都不对

11．若二次函数$f(x)=ax^2+bx$，有$f(x_1)=f(x_2)$ $(x_1\neq x_2)$则$f(x_1+x_2)$=_________。

12．给定函数$f(x)=x^2+ax+b$设P，q是满足$P+q=1$的实数，证明，若对于任意的实数x,y，均有：$pf(x)+qf(y)\geqslant f(px+qy)$，则$0\leqslant p\leqslant 1$

课后练习答案

1.（D）; 2. 2; 3. 110; 4. 40; 5. 0; 6. (D); 7. [-5/4, 1]; 8. -1/3; 9. (D); 10. (D); 11. 0; 12. (略)。

例题答案：

1．解：记 $f(x)=x^2+2px+1$，则 f(x)r 的图象开口向上，当 f(x)与 x 轴的两交点一个在（1,0）左方，另一个在（1,0）右方时，必有 $f(1)<0$，即：$1^2+2P+1<0$，即 $P<-1$

所以 P 的取值为 $(-\infty, -1)$

2．解：令 $f(x)=(1-m^2)x^2+2mx-1$，根据题设条件，f(x)的图形是下列两种情形之一（图 5）：

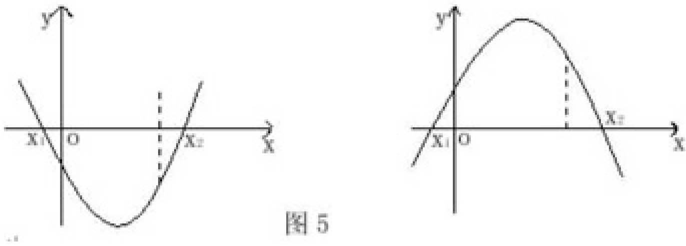


图 5

得充要条件：$(1-m^2)f(0)<0, (1-m^2)f(1)<0$；即 $1-m^2>0, (1-m^2)(2m-m^2)<0$

解得：$-1<m<0$

3．证明：已知 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$

方程 $f(x)=x$ 即 $f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c=0$ 无实根，$f(x)-x$ 仍是二次函数，$f(x)-x=0$ 仍是二次方程，它无实根即 $\Delta=(b-1)^2-4ac<0$

若 $a>0$，则函数 $y=f(x)-x$ 的图象在 x 轴上方，

∴$y>0$，即 $f(x)-x>0$ 恒成立，即：$f(x)>x$ 对任意实数 x 恒成立。

∴对 f(x)，

有 $f(f(x))>f(x)>x$ 恒成立

∴$f(f(x))=x$ 无实根

若 $a<0$，函数 $y=f(x)-x$ 的图象在 x 轴下方

∴$y<0$，即 $f(x)-x<0$ 恒成立

∴对任意实数 x，$f(x)\ <0$ 恒成立

∴对实数 f(x)，有：$f(f(x))<f(x)<x$ 恒成立

∴$f(f(x))=x$ 无实根

综上可知，当 $f(x)=x$ 无实根时，方程 $f(f(x))=x$ 也无实根

4．分析：这是一道证明题。从图象上看，当 a＞0 时，抛物线开口向上，f(x)＞0 的解集要么为全体实数集合 R（△＜0)；要么为（-∞, x_0）∪(x_0, + ∞)(Δ=0, f(x_0)=0)，要么为（-∞, x_1）∪(x_2, +∞) （Δ＞0, f(x_1)=f(x_2)=0)，故总可以找到±M≠0，±M∈R，或±M∈（-∞, x_0）∪(x_0, +∞)，或±M∈（-∞, x_1）∪(x_2, +∞)，使 f(±M)＞0，因此 af(±M)＞0，对于 a＜0 的情形，也是如此，只不过 f(±M)＜0，从代数的角度看问题，af(x)＞0 即 $a^2x^2+abx+ac>0$ ①它有解且解集合中包含着 x=M 与 x=-M（M≠0）一对相反数，因此，需考虑①所对应的二次方程的判别式。

证明：∵ $f(x)= ax^2+bx+c\ (a\neq0)$

∴ $af(x)= a^2x^2+abx+ac=1/4\ [4a^2x^2+4abx+4ac]=1/4(2ax+b)^2-1/4(b^2-4ac)$

∴ $af(x)>0$ 即: $1/4(2ax+b)^2-1/4(b^2-4ac)>0$

亦即 $(2ax+b)^2-(b^2-4ac)>0$

（1）当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，af(x)＞0 的解集为(-∞, +∞)

（2）当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，af(x)＞0 的解集为(-∞, -b/2a)∪（-b/2a, +∞)

(3)当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程 af(x)=0 有两个不等的实数根 $x_1, x_2\ (x_1<x_2)$，相应的不等式 af(x)＞0 的解集合为：（-∞, x_1）∪(x_2, +∞)

因为三种情况下的解集合均为无穷区间，故均存在-M 与 M 同属于解集合，使af(±M)＞0，从而 a 与 f(±M)同号。

5．证明：构造二次函数

$f(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

当 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\neq0$ 即 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全为零时，显然有对 x∈R，f(x)≥0，故 f(x)＝0 的判别式：$\Delta=4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant0$

即 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 时，结论显然成立，故命题成立。

[评注]本例中的不等式即是著名的柯西不等式，有时它也写作 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$。等号当且仅当 $a_1/b_1=a_2/b_2=\cdots=a_n/b_n$ 时成立。

6．［分析］该题是一九九七年全国普通高考理工类数学第 24 题，它综合考查二次函数、二次方程和不等式的基础知识，以及灵活运用数学知识和方法分析、解决问题的能力，当年没有几个考生能完整解答此题。可以从代数与几何两个角度展开思考：

从代数角度看，f(x)是二次函数，从而方程 f(x)-x=0 即 $ax^2+(b-1)x+c=0(a>0)$是二次方程，由于 x_1,x_2 是它的两个根，且方程中 x^2 的系数是 a，因此有表达式：$f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)$进而，利用二次函数的性质和题设条件，可得第（1）问的证明。

从几何角度看，抛物线 y=f(x)-x 开口向上，因此在区间 $[x_1,x_2]$ 的外部，f(x)-x>0，（1）的左端得证。其次，抛物线 y=f(x)的开口也向上，又 $x_1=f(x_1)$，于是为了证得（1）的右端，相当于要求证明函数 f(x)在区间 $[0,x_1]$的最大值是 $f(x_1)$，这相当于证明 $f(0)\leqslant f(x_1)$，也即 $C\leqslant x_1$，利用韦达定理和题设，立即可得。

至于（Ⅱ）的证明，应用配方法可得 $x_0=-b/2a$，进而利用韦达定理与题设，即得证明。

证明：①欲证：x<f(x)<x

只须证：$0<f(x)-x<x_1-x$ ①

因为方程 f(x)-x=0 的两根为 x_1,x_2, $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，∴$f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)$

①式即：$0<a(x-x_1)(x-x_2)<x_1-x$ ②

∵a>0，$x\in(0,x_1)$, $x_1-x>0$, ∴$a(x_1-x)>0$

②式两边同除以 $a(x_1-x)>0$，得：$0<x_2-x<1/a$，即：$x<x_2<1/a+x$

这由已知条件：$0<x<x_1<x_2<1/a$，即得：$x<x_2<(1/a)<1/a+x$，

故命题得证。

（2）欲证 $x_0<x_1/2$，因为 $x_0=-b/2a$，故只须证：$x_0-x_1/2=-b/2a-x_1/2<0$ ③

由韦达定理，$x_1+x_2=(-b-1)/a$，$(x_1+x_2)/2=-(b-1)/2a$，代入③式，有 $(-(b/2a))-(x_1/2)=(x_2/2)-(1/(2a))<0$，即：$x_2<1/a$

由已知：$0<x_1<x_2<1/a$，命题得证。

[评注] 证（1）用到了二次函数的零点式 $f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)$

证（2）用到了 $x_0=-(b/(2a))$, $((x_1+x_2)/2)=-((b-1)/2a)$，都是二次函数二次方程的基础知识。

7. [分析] 它是一个一元二次方程的问题，利用求根公式解出α、β，再解不等式 0<α<1 和1<β<2 顺理成章，但计算变形较繁难。如果把此题的方程的左端看作是一个二次函数的话，结合函数的图象和性质来解此题，那就简便得多了。

解：设 $y=f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$，则因为 a=7>0，且方程 f(x)=0 有两实根α，β，所以它的图象是开口向上且与 X 轴相交于两点（α,0）、(β,0)的抛物线。由于0<α<1，1<β<2，

可知在 x＜α 或 x＞β 时，f(x)取正值；在 α＜x＜β 时，f(x)取负值。于是，当 x 分列取 0,1，2 时，有：$f(0)=k^2-k-2>0$，$f(1)=k^2-2k-8<0$，$f(2)=k^2-3k>0$ 解这三个不等式组成的不等式组，可得 $-2<k<-1$ 和 $3<k<4$。

显然，上述三个一元二次不等式解起来要容易得多。

8．［分析］这是 1996 年北京高中一年级数学竞赛的复试题，是一个四次函数的最值问题。表面上看起来很难。但借助于配方法、换元法及二次函数极（最）值性质，可得结果。

解：∵$y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$

$=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+5$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+5$

$=(x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1)+5$

$=(x^2+5x+5)^2+4$

设 $z=x^2+5x+5$，则 $y=z^2+4$，对 $z=x^2+5x+5=(x+5/2)^2-5/4$，$x\in[-3,3]$，易知 $z_{min}=-5/4$，$z_{max}=29$

∴$y=z^2+4$，$z\in[-5/4,29]$抛物线开口向上，对称轴 $z=0\in[-5/4,29]$，∴$y_{min}=4$

故 $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$ 在［-3,3］上的最小值是 4。

§7 指、对数函数,幂函数

指数、对数以及指数函数与对数函数，是高中代数非常重要的内容。无论在高考及数学竞赛中，都具有重要地位。熟练掌握指数对数概念及其运算性质，熟练掌握指数函数与对数函数这一对反函数的性质、图象及其相互关系，对学习好高中函数知识，意义重大。

一、 指数概念与对数概念：

指数的概念是由乘方概念推广而来的。相同因数相乘 $a\cdot a\ldots\ldots a$(n 个)$=a^n$ 导出乘方，这里的 n 为正整数。从初中开始，首先将 n 推广为全体整数；然后把乘方、开方统一起来，推广为有理指数；最后，在实数范围内建立起指数概念。

欧拉指出："对数源出于指数"。一般地，如果 $a(a>0,a\neq1)$的 b 次幂等于 N，就是 $a^b=N$，那么数 b 叫做以 a 为底 N 的对数，记作：$log_aN=b$

其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数。

$a^b=N$ 与 $b=logaN$ 是一对等价的式子，这里 a 是给定的不等于 1 的正常数。当给出 b 求 N 时，是指数运算，当给出 N 求 b 时，是对数运算。指数运算与对数运算互逆的运算。

二、指数运算与对数运算的性质

1．指数运算性质主要有 3 条：

$a^x\cdot a^y=a^{x+y},(a^x)^y=a^{xy},(ab)^x=a^x\cdot b^x$（$a>0,a\neq1,b>0,b\neq1$）

2．对数运算法则（性质）也有 3 条：

（1）$loga(MN)=logaM+logaN$
（2）$logaM/N=logaM-logaN$
（3）$logaM^n=nlogaM(n\in R)$
$(a>0,a\neq1,M>0,N>0)$

3．指数运算与对数运算的关系：

$X=a^{logax}$；$m^{logan}=n^{logam}$

4．负数和零没有对数；1 的对数是零，即 $log_a1=0$；底的对数是 1，即 $log_aa=1$

5．对数换底公式及其推论：

换底公式：logaN=logbN/logba

推论 1：$\log_{a^m}N^n=(n/m)\log_a N$

推论 2：$\log_{\sqrt[m]{a}}\sqrt[n]{N}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}}\log_a N=\frac{m}{n}\log_a N$

三、指数函数与对数函数

函数 $y=a^x(a>0,$且 $a\neq1)$叫做指数函数。它的基本情况是：

（1）定义域为全体实数（-∞，+∞）

（2）值域为正实数（0，+∞），从而函数没有最大值与最小值，有下界，y>0

（3）对应关系为一一映射，从而存在反函数--对数函数。

（4）单调性是：当 $a>1$ 时为增函数；当 $0<a<1$ 时，为减函数。

（5）无奇偶性，是非奇非偶函数，但 $y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称，$y=a^x$ 与 $y=-a^x$ 的图象关于 x 轴对称；$y=a^x$ 与 $y=logax$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

（6）有两个特殊点：零点（0，1），不变点（1，a）

（7）抽象性质：$f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$,

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y),f(x-y)=f(x)/f(y)$

函数 y=logax(a>0,且 a≠1)叫做对数函数，它的基本情况是：

（1）定义域为正实数（0，+∞）

（2）值域为全体实数（-∞，+∞）

（3）对应关系为一一映射，因而有反函数——指数函数。

（4）单调性是：当 a>1 时是增函数，当 0<a<1 时是减函数。

（5）无奇偶性。但 $y=log_a x$ 与 $y=log_{(1/a)}x$ 关于 x 轴对称，y=logax 与 y=loga(-x)图象关于 y 轴对称，y=logax 与 $y=a^x$ 图象关于直线 y=x 对称。

（6）有特殊点（1，0）,(a，1)

（7）抽象运算性质 f(x)=logax(a>0,a≠1),

f(x·y)=f(x)+f(y),

f(x/y)=f(x)-f(y)

例题讲解

1．若 $f(x)=(a^x/(a^x+\sqrt{a}))$，求 f(1/1001)+f(2/1001)+f(3/1001)+…+f(1000/1001)

2．$5^{\log 25}$等于：（ ）

（A）1/2 （B）$(1/5)10^{\log 25}$ （C）$10^{\log 45}$ （D）$10^{\log 52}$

3．计算$\log_2(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})$

4．试比较$(12^{2002}+1)/(12^{2003}+1)$与$(12^{2003}+1)/(12^{2004}+1)$的大小。

5．已知$f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$(a,b 为实数)且 f(lglog310)=5，则 f(lglg3)的值是（ ）

（A）-5 （B）-3 （C）3 （D）随 a,b 的取值而定

6．已知函数 $y=((10^{x}-10^{-x})/2)(X\in R)$

（1）求反函数 $y=f^{-1}(x)$

（2）判断函数 $y=f^{-1}(x)$是奇函数还是偶函数

7．已知函数 f(x)=loga((1+x)/(1-x))(a＞0,a≠1)

（1）求 f(x)的定义域

（2）判断 f(x)的奇偶性并给以证明；

（3）当 a＞1 时，求使 f(x)＞0 的 x 取值范围；

（4）求它的反函数 $f^{-1}(x)$

8．2^{2003}的十进制表示是个 P 位数，5^{2003}的十进位表示是个 q 位数，则 p+q=______。

9．已知 $x^2-2x+\log_a(a^2-a)=0$ 有一正根和一负根，求实数 a 的范围。

10．设 $y=\log_{(1/2)}[a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}+1](a>0,b>0)$，求使 y 为负值的 x 的取值范围

课后练习

1．设 a,b,c 都是正数，且 $3^a=4^b=6^c$，那么（ ）
（A）(1/c)=(1/a)+(1/b), (B)(2/c)=(2/a)+(1/b), (C)(1/c)=(2/a)+(2/b), (D)(2/c)=(1/a)+(2/b)

2.F(x)=(1+((2/(2^x-1)))·f(x)(x≠0)是偶函数，且 f(x)不恒等于零，则 f(x)( )
（A）是奇函数 （B）是偶函数
（C）可能是奇函数也可能是偶函数 （D）不是奇函数也不是偶函数

3．若 $f(x)=3^x+5$，则 $f^{-1}(x)$的定义域是（ ）
（A）(0,+∞) (B) (5,+∞) (C) (8,+∞) (D) (-∞,+∞)

4．求值：$6^{\lg 40}\times 5^{\lg 36}$

5.已知 m,n 为正整数，a＞0,a≠1,且 logam+loga(1+(1/m))+loga(1+(1/(m+1))+…+loga(1+(1/(m+n-1))=lgam+logan。求 m,n

6．X=((1/(log(1/2)(1/3))+(1/(log(1/5)(1/3))的值属于区间（ ）
（A）（-2，-1） （B）（1，2） （C）（-3，-2） （D）（2，3）

7．计算：（1）lg20+log10025 (2)lg5·lg20+$(\lg 2)^2$

8．若集合{x，xy，lg(xy)}={0，｜x｜,y}，则 log8(x^2+y^2)=______。

9．若 x∈(1,10)，则 $\lg^2x,\lg x^2,\lg\lg x$ 的大小顺序是：

（A）$\lg^2x<\lg x^2<\lg\lg x$ (B)$\lg 2^x<\lg\lg x<\lg x^2$

（C）$\lg x^2<\lg^2x<\lg\lg x$ (D)$\lg\lg x<\lg^2x<\lg x^2$

10．计算：$\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$

11．集合{x｜-1≤log(1/x)10＜-(1/2),x∈N}的真子集的个数是 。

12．求函数 $y=(1/4)^{x2-2x-3}$ 的单调区间。

13．已知指数函数 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$，求满足 $f(3x^2-4x-5)>f(2x^2-3x+1)$的 x 的取值。

14．解方程 $8^{\log6(x2-7x+15)}=5^{\log68}$

15．设有关于 x 的不等式 lg (｜x+3｜+｜x-7｜)＞a

（1）当 a=1 时，解这个不等式；

（2）当 a 为何值时，这个不等式的解集为 R？

课后练习答案

1.（B）；2.（A）；3.（B）；4.216；5.m=2，n=2；
6.（D）；7.（1）2，（2）1；8.1/3；9.（D）；
10.1/2；11.2^{90}-1；12.单调增区间（-∞，1]，单调减区间[1，+∞）
13.当 a＞1 时，x＜-2 或 x＞3，当 0＜a＜1 时，-2＜x＜3；
14.x1=2,x2=5；
15.(1)x＜-3 或 x＞7，（2）a＜1

例题答案：

1． 分析：和式中共有 1000 项，显然逐项相加是不可取的。需找出 f(x)的结构特征，发现规律，注意到 1/1001+1000/1001=2/1001+999/1001=3/1001+998/1001=…=1，

而 f(x)+f(1-x)=(a^x/(a^x+√a))+(a^{1-x}/(a^{1-x}+√a))=(a^x/(a^x+√a))+(a/(a+a^x·√a))=(a^x/(a^x+√a))+((√a)/(a^x+√a))=((a^x+√a)/(a^x+√a))=1 规律找到了，这启示我们将和式配对结合后再相加：

原式=[f(1/1001)+f(1000/1001)]+[f(2/1001)+f(999/1001)]+…+[f(500/1001)+f(501/1001)]=(1+1+…+1)5000 个=500

说明：观察比较，发现规律 f(x)+f(1-x)=1 是本例突破口。

（1）取 a=4 就是 1986 年的高中数学联赛填空题：设 $f(x)=(4^x/(4^x+2))$，那么和式 $f(1/1001)+f(2/1001)+f(3/1001)+\ldots+f(1000/1001)$的值=__________。

（2）上题中取 a=9，则 $f(x)=(9^x/(9^x+3))$，和式值不变也可改变和式为求 $f(1/n)+f(2/n)+f(3/n)+\ldots+f((n-1)/n)$.

（3）设 $f(x)=(1/(2^x+\sqrt{2}))$，利用课本中推导等差数列前 n 项和的方法，可求得 $f(-5)+f(-4)+\ldots+f(0)+\ldots+f(5)+f(6)$的值为________。这就是 2003 年春季上海高考数学第 12 题。

2．解：∵ $5^{\log 25}=(10/2)^{\log 25}=(10^{\log 25})/(2^{\log 25})=(1/5)\times 10^{\log 25}$

∴选（B）

说明：这里用到了对数恒等式：$a^{\log_a N}=N(a>0,a\neq 1,N>0)$

这是北京市 1997 年高中一年级数学竞赛试题。

3．解法 1：先运用复合二次根式化简的配方法对真数作变形。

$$\sqrt{3\pm\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6\pm 2\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{5\pm 5\sqrt{5}+1}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}\pm 1)^2}{2}}=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \log_2(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$$

解法 2：利用算术根基本性质对真数作变形，有

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2}=\sqrt{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}-2\sqrt{3^2-5}}=\sqrt{6-2\sqrt{4}}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \log_2(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})=\log_2\sqrt{2}=1/2$$

说明：乘法公式的恰当运用化难为易，化繁为简。

4．解：对于两个正数的大小，作商与 1 比较是常用的方法，记 $12^{2003}=a>0$，则有

$((12^{2002}+1)/(12^{2003}+1))\div((12^{2003}+1)/(12^{2004}+1))=((a/12)+1)/(a+1)\cdot((12a+1)/(a+1))=((a+12)(12a+1))/(12(a+1)^2)=((12a^2+145a+12)/(12a^2+24a+12))>1$

故得：$((12^{2002}+1)/(12^{2003}+1))>((12^{2003}+1)/(12^{2004}+1))$

5．　解：设 lglog310=t，则 lglg3=lg(1/log310)=-lglog310=-t

而 f(t)+f(-t)=

$$(a\sin t+b\sqrt[3]{t}+4)+a\sin(-t)+b\sqrt[3]{-t}+4)$$
$$=(a\sin t+b\sqrt[3]{t}+4)+(-a\sin t-b\sqrt[3]{t}+4)=8$$

∴f(-t)=8-f(t)=8-5=3

说明：由对数换底公式可推出 logab·logba=(lgb/lga)·(lga/lgb)=1，即 logab=(1/logba)，因而 lglog310 与 lglg3 是一对相反数。设 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$ 中的部分 $a\sin x+b\sqrt[3]{x}=g(x)$，则 g(x)为奇函数，g(t)+g(-t)=0。这种整体处理的思想巧用了奇函数性质使问题得解，关键在于细致观察函数式结构特征及对数的恒等变形。

6．分析：（1）求 $y=(10^x-10^{-x})/2$ 的反函数首先用 y 把 x 表示出来，然后再对调 x,y 即得到 $y=f^{-1}(x)$;

（2）判断函数 $y=f^{-1}(x)$的奇偶性要依据奇函数或偶函数的定义，看当 X∈R 时是否有

f(-x)=-f(x)或(f(-x)+f(x)=0)
或 f(-x)=f(x)
恒成立。

解：（1）由 $y=((10^x-10^{-x})/2)$(X∈R)可得 $2y=10^x-10^{-x}$，设 $10^x=t$，上式化为：$2y=t-t^{-1}$ 两边乘 t，得 $2yt=t^2-1$ 整理得：$t^2-2yt-1=0$，解得：$t=y\pm\sqrt{y^2+1}$

由于 $t=10^x>0$，故将 $t=y-\sqrt{y^2+1}<0$ 舍去，得到：$t=y+\sqrt{y^2+1}$ 将 $t=10^x$ 代入上式，即得:

$$10^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

$$\therefore x=\lg(y+\sqrt{y^2+1}$$

所以函数 $y=((10^x-10^{-x})/2)$的反函数是 $y=f^{-1}(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1}(x\in R)$

(2)由$f^{-1}(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$得:

$$f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})+\lg(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$$
$$=\lg[(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})]=\lg[(x^2+1)-x^2]=\lg 1=0$$

∴f-1(-x)=-f(x)

所以，函数 $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数。

说明：①从本题求解及判断过程可以得到更一般的结论：函数 $y=((a^x-a^{-x})/2)(X\in R,a>0,a\neq 1)$的反函数是$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，它们都是奇函数。当 a=2,3,10 或 e 时就构造了新的特殊的题目。进一步还可以研究它们的单调性，如 1992 年高考数学试题：函数 $y=((e^x-e^{-x})/2)$的反函数

（A）是奇函数，它在(0,+∞)上是减函数；
（B）是偶函数，它在(0,+∞)上是减函数；
（C）是奇函数，它在(0,+∞)上是增函数；
（D）是偶函数，它在(0,+∞)上是增函数。

②函数 $y=((a^x-a^{-x})/2)$是由 $y=f(x)=a^x$ 构造而得，全日制普通高级中学教科书（试验修订本。必修）《数学》第一册（上）（人民教育出版社中学数学室编著）P107 复习参考题二 B 组第 6 题：设 y=f(x)是定义在 R 上的任一函数，

求证：（1）F1(x)=f(x)+f(-x)是偶函数；
（2）F2(x)=f(x)-f(-x)是奇函数。

而 f(x)=F1(X)+F2(x)，它说明，定义在 R 上的任一函数都可以表示成一个奇函数(F2(x))与一个偶函数(F1(x))的代数和。从这个命题出发，由 $f(x)=a^x$ 就可以构造出诸多奇函数，比如，$y=((a^x-a^{-x})/2)$；$y=((a^x-a^{-x})/(a^x+a^{-x}))=((a^{2x}-1)/(a^{2x}+1))$等等用自然对数的底 e≈2.71828…（无理数）作底，作函数 $sh(x)=((e^x-e^{-x})/2)$,$ch(x)=((e^x+e^{-x})/2)$,$th(x)=((e^x-e^{-x})/(e^x+e^{-x}))$它们分别叫做双曲正弦函数，双曲余弦函数，双曲正切函数，它们具有如下性质：

(1)$ch^2(x)-sh^2(x)=1$;
(2)sh(x+y)=sh(x)·ch(y)+ch(x)·sh(y);
(3)ch(x+y)=ch(x)·ch(y)+sh(x)·sh(y);
(4)th(x+y)=((th(x)+th(y))/(1+th(x)·th(y)));
(5)ch(-x)=ch(x);
(6)sh(-x)=-sh(x);
(7)th(-x)=-th(x).
令 x=y，则有
(8)sh(2x)=2sh(x)·ch(x);

(9)ch(2x)=$ch^2(x)+sh^2(x)$

其中①⑧⑨合起来，就是课本 P107 的第 8 题。

7.　　解：（1）由对数的定义域知((1+x)/(1-x))＞0

解这个分式不定式，得：(x+1)(x-1)＜0,-1＜x＜1

故函数 f(x)的定义域为（-1，1）

（2）f(-x)=loga((1-x)/(1+x))=log$((1+x)/(1-x))^{-1}$=-loga((1+x)/(1-x))=-f(x)

由奇函数的定义知，函数 f(x)是奇函数。

（3）由 loga((1+x)/(1-x))＞0＜＝＞loga((1+x)/(1-x))＞loga1，

因为 a＞1，所以由对数函数的单调性知((1+x)/(1-x))＞1，考虑由（1）知 x＜1,1-x＞0，去分母，得：1+x＞1-x,x＞0 故：0＜x＜1

所以对于 a＞1，当 x∈(0,1)时函数 f(x)＞0

（4）由 y=loga((1+x)/(1-x))得：((1+x)/(1-x))=a^y 应用会比分比定理得：((1+x)+(1-x))/((1+x)-(1-x))=((a^y+1)/(a^y-1))即:(2/2x)=((a^y+1)/(a^y-1))

∴x=((a^y-1)/(a^y+1))交换 x,y 得：

y=((a^x-1)/(a^x+1))，它就是函数 f(x)=loga((1+x)/(1-x))的反函数 $f^{-1}(x)$即 $f^{-1}(x)$=((a^x-1)/(a^x+1))

说明：（1）函数 y=loga((1+x)/(1-x))与 y=((a^x-1)/(a^x+1))是一对反函数。取 a=e，函数 y=((e^x-1)/(e^x+1))的反函数的定义域是______。这就是 89 年的高考题目。

（2）已知 f(x)=lg((1-x)/(1+x)),a,b∈(-1,1)求证：f(a)+f(b)=f((a+b)/(1+ab))（P89 习题 2.8 第 4 题）可以看作该类函数的性质。

（3）y=a^x 与 y=logax；y=((a^x-a^{-x})/2)与 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$；y=((a^x-1)/(a^x+1))与 y=loga((1+x)/(1-x))这三对互反函数及其性质需要理解记忆。

8．解：∵2^{2003}是个 P 位数,

∴$10^{p-1}<2^{2003}<10^p$ ①

∵5^{2003}是个 q 位数，

∴$10^{q-1}<5^{2003}<10^q$ ②

①×②得:$10^{p+q-2}<(2\times5)^{2003}<10^{p+q}$

即 $10^{p+q-2}<10^{2003}<10^{p+q}$ ③

∴2003=p+q-1

∴p+q=2004

9．解：方程有一正根一负根的充分必要条件是：

$\log_a(a^2-a)<0$（由韦达定理而来）①

由 $a>0, a\neq 1, a^2-a=a(a-1)>0$,可得 $a>1$ ②，从而由 $\log_a(a^2-a)<0=\log_a 1$ 得:$a^2-a<1, a^2-a-1<0$，解得: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ③，由②③得: $1<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

10．解：∵(1/2)<1,要使 y<0,只要

$a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}+1>1$，
即 $a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}>0$
$\rightarrow b^{2x}[(a/b)^{2x}+2(a/b)^x-1]>0$
$\rightarrow [(a/b)^x]^2+2(a/b)^x-1>0$

$\rightarrow ((a/b)^x+1+\sqrt{2})((a/b)^x+1-\sqrt{2})>0$

$\rightarrow \because ((a/b)^x+1+\sqrt{2})>0$ $((a/b)^x+1-\sqrt{2})>0$

$\rightarrow (a/b)^x>\sqrt{2}-1$.

1°当 $a>b>0$ 时,$a/b>1$, $x>\log_{a/b}(\sqrt{2}-1)$;

2°当 $b>a>0$ 时,$0<a/b<1$, $x<\log_{a/b}(\sqrt{2}-1)$
3°当 $a=b>0$ 时，$x\in R$。

§8 函数方程

许多函数方程的解决仅以初等数学为工具，解法富于技巧，对人类的智慧具有明显的挑战意味，因此，函数方程是数学竞赛中一种常见的题型。

1、确定函数的形式

尚无一般解法，需因题而异，其解是多样的：有无限多解的，有有限个解的，有可能无解（如：方程 $f^2(x)+f^2(-x)+1=0$ 无解）。

2、确定函数的性质

3、确定函数值

三、求函数的解析式

1、换元法

2、赋值法

四、研究函数的性质

例题讲解

1．设函数 $f(x)$ 满足条件 $3f(x-1)+2f(1-x)=2x$，求 $f(x)$。

2．设函数 $f(x)$ 定义于实数集 R，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+xf(1-x)=1+x$，求 $f(x)$。

3．函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义，但对所有非零实数 x 有：$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$，求 $f(x)$。

4．求满足条件 $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$ 的 $f(x)$。

5．设函数$f(x)$定义于实数集R上，且$f(0)=1$，若对于任意实数m、n，都有：

$f(m-n)=f(m)-n(2m-n+1)$，求$f(x)$。

6．设函数$f(x)$定义于自然数集N上，且$f(1)=1$，若对于任意自然数x、y，都有：

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$，求$f(x)$。

7．设函数$f(x)$定义于R上，且函数$f(x)$不恒为零，$f(\frac{\pi}{2})=0$，若对于任意实数x、y，恒有：

$f(x)+f(y)=2f(\frac{x+y}{2})\cdot f(\frac{x-y}{2})$。

① 求证：$f(x+2\pi)=f(x)$

② 求证：$f(x)=f(-x)$

③ 求证：$f(2x)=2f^2(x)-1$

8．对常数m和任意x，等式$f(x+m)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$都成立，求证：函数$f(x)$是周期函数。

9．设函数 $f(x)$ 定义于实数集 R 上，函数 $f(x)$ 不恒为零，且对于任意实数 x_1、x_2，都有：$f(2x_1)+f(2x_2)=f(x_1+x_2)\cdot f(x_1-x_2)$，求证：$f(x)=f(-x)$。

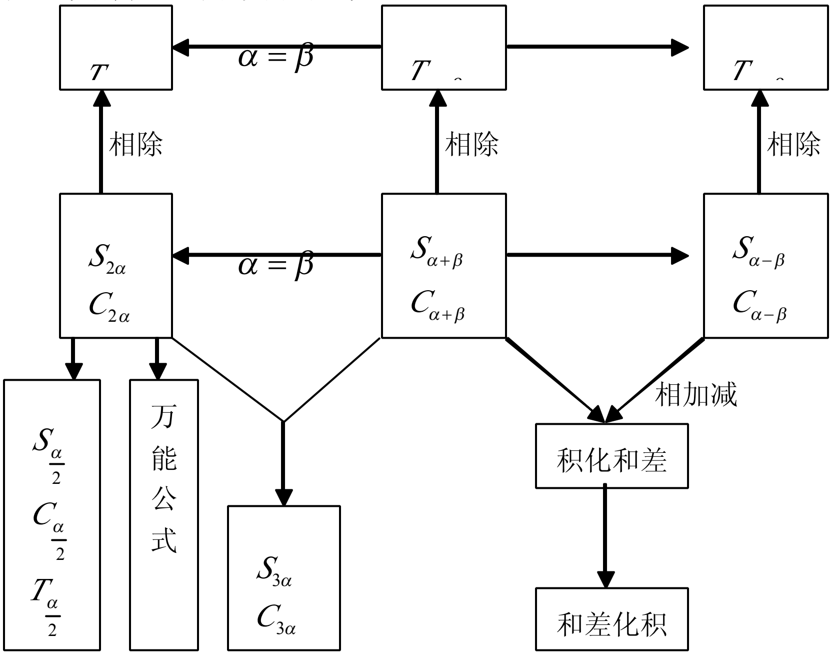
§9 三角恒等式与三角不等式

三角恒等变形，既要遵循代数式恒等变形的一般法则，又有三角所特有的规律.

三角恒等式包括绝对恒等式和条件恒等式两类。证明三角恒等式时，首先要观察已知与求证

或所证恒等式等号两边三角式的繁简程度，以决定恒等变形的方向；其次要观察已知与求证或所证恒等式等号两边三角式的角、函数名称、次数以及结构的差别与联系，抓住其主要差异，选择恰当的公式对其进行恒等变形，从而逐步消除差异，统一形式，完成证明.“和差化积”、“积化和差”、“切割化弦”、“降次”等是我们常用的变形技巧。当然有时也可以利用万能公式“弦化切割”，将题目转化为一个关于$t=\tan\dfrac{x}{2}$的代数恒等式的证明问题.

要快捷地完成三角恒等式的证明，必须选择恰当的三角公式．为此，同学们要熟练掌握各公式及各公式的来龙去脉和变形形式.



上图为三角公式脉络图，由图可见两角和差的三角函数的公式是所有三角公式的核心和基础.

此外，三角是代数与几何联系的“桥梁”，与复数也有紧密的联系，因而许多三角问题往往可以从几何或复数角度获得巧妙的解法.

三角不等式首先是不等式，因此，要掌握证明不等式的常用方法：配方法、比较法、放缩法、基本不等式法、数学归纳法等．其次，三角不等式又有自己的特点——含有三角式，因而三角函数的单调性、有界性以及图象特征等都是处理三角不等式的锐利武器.

三角形中有关问题也是数学竞赛和高考的常见题型．解决这类问题，要充分利用好三角形内角和等于 180° 这一结论及其变形形式．如果问题中同时涉及边和角，则应尽量利用正弦定理、余弦定理、面积公式等进行转化，实现边角统一．求三角形面积的海伦公式

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$[其中$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$]，大家往往不甚熟悉，但十分有用.

例题讲解

1．已知$\sin\alpha = A\sin(\alpha+\beta), |A|>1$, 求证: $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta - A}$.

2．证明：$\cos 7x + 7\cos 5x + 21 ocs 3x + 35\cos x = 64\cos^7 x$.

3．求证：$\sqrt{3}\tan 18^\circ + \tan 18^\circ \tan 12^\circ + \sqrt{3}\tan 12^\circ = 1.$

4．已知$\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = 2001$, 求证: $\sec 2\alpha + \tan 2\alpha = 2001.$

5．证 明：$4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta) = \sin 3\theta.$

6．求证：①$\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ = \dfrac{1}{16}$

②$\sin 1^\circ \ \sin 2^\circ \ \sin 3^\circ \ \cdots \sin 89^\circ = (\dfrac{1}{4})^{45} \times 6\sqrt{10}.$

7．证明：对任一自然数 n 及任意实数 $x \neq \dfrac{m}{2^k}\pi (k = 0,1,2,\cdots,n, m$ 为任一整数），有

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x.$$

8．证明：$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin(\alpha+n\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\frac{n}{2}\beta)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}.$

9．若$0<\theta<\pi$，求证：$\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta>0$

10．已知$0<\theta<\pi$，证明：$2\sin 2\theta\le ctg\frac{\theta}{2}$，并讨论等号成立的条件。

11．已知$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，能否以$\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\sin(\alpha+\beta)$的值为边长，构成三角形。

12．在△ABC中，角A、B、C的对边为a、b、c，求证：$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\ge\frac{\pi}{3}$

13．在锐角△ABC中，求证

（1）$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$；（2）$tgAtgBtgC>1$

14．设$x\ge y\ge z\ge\frac{\pi}{12}$，且$x+y+z=\frac{\pi}{2}$，求乘积$\cos x\sin y\cos z$的最大值和最小值。

课后练习

1．证明：sin47°+sin61°－sin11°－sin25°=cos7°．

2．证明：$\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

3．已知：sin*A*+sin*B*+sin*C*=0，cos*A*+cos*B*+cos*C*=0.
求证：sin2*A*+sin2*B*+sin2*C*=0，cos2*A*+cos2*B*+cos2*C*=0.

4．已知$\theta\in(0,\pi)$,求证：$\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta=0$.

5．已知$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,且$\tan\beta=3\tan\alpha$,求$\beta-\alpha$的最大值.

6．已知α、β、γ、$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$,且$\alpha+\beta+\gamma+\theta=\pi$.求$y=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\theta$的最大值.

7．△ABC 中，C=2B 的充要条件是$c^2-b^2=ab$.

8．△ABC 中，已知$\sin^2 A$、$\sin^2 B$、$\sin^2 C$成等差数列，求证：$\cot A$、$\cot B$、$\cot C$也成等差数列.

9．△ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，已知$2b=a+c$，求 B 的最大值.

10．若α、$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$,能否以$\sin\alpha$、$\sin\beta$、$\sin(\alpha+\beta)$的值为边长构成一个三角形.

11．求函数$y=\sqrt{2+x}+\sqrt{8-3x}$的值域.

12．求函数$y=\frac{x}{2}+1+\sqrt{x^2+2x+2}$的值域.

13．在△ABC中，求证：$c\ge a\cos A+b\cos B$；$b\ge c\cos C+a\cos A$；

$a\ge b\cos B+a\cos A$。

14．设α为锐角，求证：$(1+\dfrac{1}{\sin\alpha})(1+\dfrac{1}{\cos\alpha})\ge 3+2\sqrt{2}$

15．对$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，求证：$2x<\sin x+tgx$。

例题答案：

1．分析：条件涉及到角α、$\alpha+\beta$，而结论涉及到角$\alpha+\beta$，β.故可利用

$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$或$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$消除条件与结论间角的差异，当然亦可从式中的“A”入手.

证法 1： ∵ $\sin\alpha = A\sin(\alpha+\beta)$,

$\therefore \sin(\alpha+\beta-\beta) = A\sin(\alpha+\beta)$,

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta = A\sin(\alpha+\beta),$$
$$\sin(\alpha+\beta)(\cos\beta-A) = \sin\beta\cos(\alpha+\beta),$$

$\because |A|>1$,

$\therefore \cos\beta - A\neq 0$,

从而$\cos(\alpha+\beta)\neq 0$,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}.$$

证法 2：$$\frac{\sin\beta}{\sin\beta-A}=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{\cos\beta\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha}$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{\cos\beta\sin(\alpha+\beta)-\sin[(\alpha+\beta)-\beta]}$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)\sin\beta}$$
$$=\tan(\alpha+\beta).$$

2． 分析：等号左边涉及角 $7x$、$5x$、$3x$、x 右边仅涉及角 x，可将左边各项逐步转化为 $\sin x$、$\cos x$的表达式，但相对较繁．观察到右边的次数较高，可尝试降次.

证明：因为$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$,所以$4\cos^3 x=\cos 3x+3\cos x$,

从而有$16\cos^6 x=\cos^2 3x+6\cos 3x\cos x+9\cos^2 x$
$$=\frac{1+\cos 6x}{2}+3(\cos 4x+\cos 2x)+\frac{9}{2}(1+\cos 2x)$$

$$32\cos^6 x = 1+\cos 6x+6\cos 4x+6\cos 2x+9+9\cos 2x,$$
$$64\cos^7 x = 2\cos 6x\cos x+12\cos 4x\cos x+30\cos 2x\cos x+20\cos x$$
$$=\cos 7x+\cos 5x+6\cos 5x+6\cos 3x+15\cos 3x+15\cos x+20\cos x$$
$$=\cos 7x+7\cos 5x+21\cos 3x+35\cos x.$$

评述：本题看似“化简为繁”，实质上抓住了降次这一关键，很是简捷．另本题也可利用复数求解．令 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$,则$2\cos\alpha=z+\dfrac{1}{z}$,从而,$128\cos^7\alpha=(z+\dfrac{1}{z})^7$，展开即可.

3． 思路分析：等式左边同时出现 $\tan 18^\circ\tan 12^\circ$ 、 $\tan 18^\circ+\tan 12^\circ$，联想到公式 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

证明：$\sqrt{3}\tan 18^\circ+\tan 18^\circ\tan 12^\circ+\sqrt{3}\tan 12^\circ$

$=\sqrt{3}(\tan 18^{\circ}+\tan 12^{\circ})+\tan 18^{\circ}\tan 12^{\circ}$

$=\sqrt{3}\times\tan(18^{\circ}+12^{\circ})(1-\tan 18^{\circ}\tan 12^{\circ})+\tan 18^{\circ}\tan 12^{\circ}$

$=1$

评述：本题方法具有一定的普遍性. 仿此可证 $(1+\tan 1^{\circ})(1+\tan 2^{\circ})\cdots(1+\tan 43^{\circ})$

$(1+\tan 44^{\circ})=2^{22}$等.、

4．证明：$\sec 2\alpha+\tan 2\alpha=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{1-\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}+2\alpha)}=\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

$=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$

$=2001.$

5．证明：$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^{3}\theta$

$=4\sin\theta(\frac{3}{4}-\sin^{2}\theta)$

$=4\sin\theta(\frac{3}{4}\cos^{2}\theta-\frac{1}{4}\sin^{2}\theta)$

$=4\sin\theta[(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)^{2}-(\frac{1}{2}\sin\theta)^{2}]$

$=4\sin\theta(\sin 60^{\circ}\cos\theta+\cos 60^{\circ}\sin\theta)(\sin 60^{\circ}\cos\theta-\cos 60^{\circ}\sin\theta)$

$=4\sin\theta\sin(60^{\circ}+\theta)\sin(60^{\circ}-\theta)$

评述：这是三倍角的正弦的又一表示. 类似地，有 $\cos 3\theta=4\cos\theta\cos(60^{\circ}-\theta)\cos(60^{\circ}+\theta)$

$\tan 3\theta=\tan\theta+\tan(60^{\circ}-\theta)\tan(60^{\circ}+\theta)$. 利用这几个公式可解下例.

6. 证明：①cos6° cos42° cos66° cos78°

$=\cos 6^{\circ}\cos 54^{\circ}\cos 66^{\circ}\times\dfrac{\cos 42^{\circ}\cos 78^{\circ}}{\cos 54^{\circ}}$

$=\dfrac{\cos 18^{\circ}\cos 42^{\circ}\cos 78^{\circ}}{4\cos 54^{\circ}}$

$=\dfrac{\frac{1}{4}\cos(3\times 18^{\circ})}{4\cos 54^{\circ}}$

$=\dfrac{1}{16}.$

②sin1° sin2° sin3° …sin89°

=(sin1° sin59° sin61°)(sin2° sin58° sin62°)…(sin29° sin31° sin89°)sin30° sin60°

$$=(\frac{1}{4})^{29}\sin 3^\circ \sin 6^\circ \cdots \sin 87^\circ \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=(\frac{1}{4})^{30}\sqrt{3}(\sin 3^\circ \sin 57^\circ \sin 63^\circ)(\sin 6^\circ \sin 54^\circ \sin 66^\circ)\cdots(\sin 27^\circ \sin 33^\circ \sin 87^\circ)\sin 30^\circ \sin 60^\circ$$

$$=(\frac{1}{4})^{40}\times 3\sin 9^\circ \cdot \sin 18^\circ \cdots \sin 81^\circ$$

$$=(\frac{1}{4})^{40}\times 3\times(\sin 9^\circ \sin 18^\circ)(\sin 18^\circ \sin 72^\circ)(\sin 27^\circ \sin 63^\circ)(\sin 36^\circ \sin 54^\circ)\cdot \sin 45^\circ$$

$$=(\frac{1}{4})^{42}\cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 18^\circ \sin 36^\circ \sin 54^\circ \sin 72^\circ$$

$$=(\frac{1}{4})^{42}\times \frac{3}{2}\sqrt{2}\cos 72^\circ \cos 54^\circ \cos 36^\circ \cos 18^\circ$$

$$=(\frac{1}{4})^{42}\times \frac{3}{2}\sqrt{2}\cos 18^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ \cos 54^\circ$$

$$=(\frac{1}{4})^{42}\times \frac{3}{2}\sqrt{2}\cos 18^\circ \cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 54^\circ$$

$$=(\frac{1}{4})^{43}\times \frac{3}{2}\sqrt{2}\sin 72^\circ \cos 54^\circ$$

$$=(\frac{1}{4})^{43}\times \frac{3}{2}\sqrt{2}\cos 18^\circ \sin 36^\circ$$

又 $(\cos 18^\circ \sin 36^\circ)^2=\frac{1}{4}(1+\cos 36^\circ)(1-\cos 72^\circ)$

$$=\frac{1}{4}(1+\cos 36^\circ-\cos 72^\circ-\cos 36^\circ \cos 72^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}(1+\cos 36^\circ \cos 72^\circ)$$

$$=\frac{5}{16}$$

即 $\cos 18^\circ \sin 36^\circ=\frac{\sqrt{5}}{4}.$

所以 $\sin 1^\circ \sin 2^\circ \cdots \sin 89^\circ=(\frac{1}{4})^{45}\times 6\sqrt{10}.$

7. 思路分析：本题左边为 n 项的和，右边为 2 项之差，故尝试将左边各项“裂”成两项之差，并希冀能消去其中许多中间项.

证明：$\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2\cos^2 x-\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x,$

同理 $\frac{1}{\sin 4x}=\cot 2x-\cot 4x$

……

$$\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot 2^{n-1}x-\cot 2^n x$$

评述：①本题裂项技巧也可通过数学归纳法获得.

②“裂项相消”在解题中具有一定的普遍性，类似可证下列各题：

$$\tan\alpha\tan 2\alpha+\tan 2\alpha\tan 3\alpha+\cdots+\tan(n-1)\alpha\tan n\alpha=\frac{\tan n\alpha}{\tan\alpha}-n.$$

$$\tan\alpha+2\tan 2\alpha+2^2\tan 2^2\alpha+\cdots+2^n\tan 2^n\alpha=\cot\alpha-2^{n+1}\cot 2^{n+1}\alpha.$$

$$\frac{1}{\cos 0^\circ\cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ\cos 2^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos 88^\circ\cos 89^\circ}=\cos 1^\circ\cot 1^\circ$$

8. 证明：$\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\frac{\beta}{2})-\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})]$,

类似地 $\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\frac{3}{2}\beta)-\cos(\alpha+\frac{\beta}{2})]$,

$\sin(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2}=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\frac{5}{2}\beta)-\cos(\alpha+\frac{3}{2}\beta)]$,

……

$\sin(\alpha+n\beta)\sin\frac{\beta}{2}=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta)-\cos(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta)]$,

各项相加得,$\sin\frac{\beta}{2}[\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin(\alpha+n\beta)]$

$=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta)-\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})]$

$=\sin(\alpha+\frac{n}{2}\beta)\sin\frac{n+1}{2}\beta.$

所以，$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cdots+\sin(\alpha+n\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\frac{n}{2}\beta)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}.$

评述：①本题也可借助复数获证.

②类似地，有 $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots+\cos(\alpha+n\beta)=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos(\alpha+\frac{n}{2}\beta)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$

利用上述公式可快速证明下列各式：

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta\cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3}{7}\pi+\cos\frac{5}{7}\pi=\frac{1}{2}.$$

$\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3}{9}\pi+\cos\frac{5}{9}\pi+\cos\frac{7}{9}\pi=\frac{1}{2}$ 等.

§10 向量与向量方法

（一）

1．（2004 年上海春季高考题）在ΔABC 中，有命题① $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$；② $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$；③若 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$，则ΔABC 为等腰三角形；④若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}>0$，则ΔABC 为锐角三角形.上述命题正确的是　　　　（　　）

A．①②　　　B．①④　　　C．②③　　　D．②③④

2．已知 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OM}$＝(－1，1)，$\overrightarrow{NM}$＝(－5，－5)，集合 A＝{ $\overrightarrow{OR}$||RN|＝2}，$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}\in$A，$\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{MQ}(\lambda\in R,\ \lambda\neq 0)$，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=$＿＿＿＿＿＿＿＿.

3．已知向量 $\vec{a}=-\vec{e}_1+3\vec{e}_2+2\vec{e}_3$，$\vec{b}=4\vec{e}_1-6\vec{e}_2+2\vec{e}_3$，$\vec{c}=-3\vec{e}_1+12\vec{e}_2+11\vec{e}_3$，问 $\vec{a}$ 能否表示成

$\vec{a}=\lambda_1\vec{b}+\lambda_2\vec{c}$ 的形式？若能，写出表达式；若不能，说明理由.

4．已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是两非零向量，若 $\vec{a}+3\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-5\vec{b}$ 垂直，$\vec{a}-4\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，试求 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角.

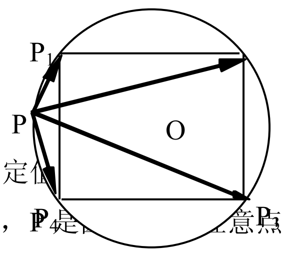
5．设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ 及 $|3\vec{a}-2\vec{b}|=3$. 求 $|3\vec{a}+\vec{b}|$ 的值.

引申　已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=$r，$|\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b}|=$R，试求 $|\lambda_2\vec{a}+\mu_2\vec{b}|$ 的值.

6．设 A、B、C、D 是坐标平面上的四点，它们的坐标分别为：A(x_A，y_A)，B(x_B，y_B)，C(x_C，y_C)，D(x_D，y_D)，且它们中任意三点不共线．试证明：

四边形 ABCD 为正方形的充要条件为 $(x_B-x_A,\ y_B-y_A)=(x_C-x_D,\ y_C-y_D)$，

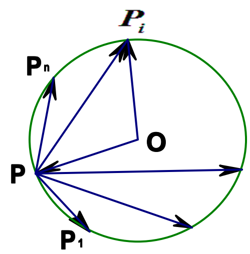
且 $(x_B-x_A)(x_C-x_B)+(y_B-y_A)(y_C-y_B)=0$.



7．如图，设四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 是圆 O 的内接正方形，P 是圆 O 上的任意点．求证：$|\overrightarrow{PP_1}|^2+|\overrightarrow{PP_2}|^2+|\overrightarrow{PP_3}|^2+|\overrightarrow{PP_4}|^2$ 为定值

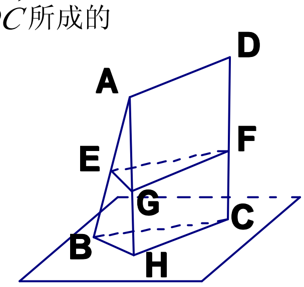
8．如图，设 P_1，P_2，P_3，…，P_n，是圆 O 内接正 n 边形的顶点，P 是 … 意点，求证：

$\overrightarrow{PP_1}^2+\overrightarrow{PP_2}^2+\cdots+\overrightarrow{PP_n}^2$ 为定值.

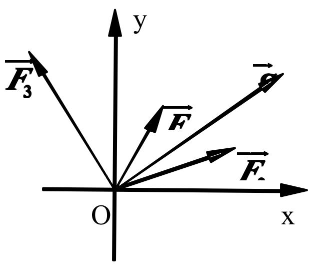


9．空间有十个点 A_1，A_2，…，A_{10}，试求一个点 P，使 $PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_{10}^2$ 为最小.

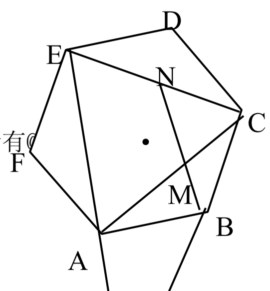
10．如图，空间四边形 ABCD 中，点 E 分 $\overrightarrow{AB}$ 及点 F 分 $\overrightarrow{DC}$ 所成的比均为 λ，则 $\overrightarrow{EF}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}$.



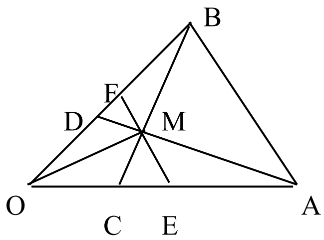
11．一个物体受到同一个平面内三个力 $\vec{F_1}$、$\vec{F_2}$、$\vec{F_3}$ 的作用，沿北偏东 45°的方向移动了 8m，其中|$\vec{F_1}$|＝2N，方向为北偏东 30°；|$\vec{F_2}$|＝4N，方向为东偏北 30°；|$\vec{F_3}$|＝6N，方向为西偏北 60°，求合力所作的功.



12. 设 M、N 分别是正六边形 ABCDEF 的对角线 AC、CE 的内分点，且 $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}=\lambda$，若 B、M、N 共线，求 λ 的值.



13．如图，在ΔOAB 中，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，AD 与 BC 交于 M 点，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. (1)用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OM}$；(2)已知线段 AC 上取一点 E，在线段 BD 上取一点 F，使 EF 过 M 点，设 $\overrightarrow{OE}=p\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OF}=q\overrightarrow{OB}$，求证：$\frac{1}{7p}+\frac{3}{7q}=1$.



14．（2002 年高考试题）已知两点 M(－1，0)，N(1，0)，且点 P 使 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 成公差小于零的等差数列.

(1)点 P 的轨迹是什么曲线？

(2)若点 P 的坐标是(x_0，y_0)，θ 为 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角，求 $\tan\theta$.

（二）

1．已知 $a,b\in R^{+}$，$m,n\in R$，$m^2n^2>a^2m^2+b^2n^2$，令 $M=\sqrt{m^2+n^2}$，$N=a+b$.则 M 与 N 的大小关系是 (　　)

A．M>N　　B．M<N　　C．M＝N　　D．M、N 间的大小关系不能确定

(2000 年河北省高中数学竞赛试题)

2．实数 x_1, x_2, x_3 满足 $x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=1$，及 $x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{3}x_3^2=3$，则 x_3 的最小值是____________________.（1993 年上海市高三数学竞赛试题）

3．（证明恒等式）（1）已知 $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$，且 x、y、z、a、b、c 为非零实数，求证：$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

4．（求值）（1）已知 $(x^2+1)(y^2+1)=3(2xy-1)$，试求 $y(\frac{1}{y}-x)$ 的值。

5．题组（1）求实数 x、y 的值，使函数 $f(x，y)=(1-y)^2+(x+y-3)^2+(2x+y-6)^2$ 取得最小值.（2001 年全国初中数学联赛）

（2）若 $\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=5$，求 $x+y$ 的最小值.

（3）求函数 $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ 的值域.

变题　求函数 $y=\sqrt{x^2+p^2}+\sqrt{(x-q)^2+r^2}\,(p,q,r\in R^{+})$ 的极值.

（4）已知点 $P(x,y)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 上，求 $2x-y$ 的最大值.

（5）设 $x_i(i=1,2,3,\cdots,2003)$ 为正实数，且 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_{2003}}=2003$，试求 $y=\sqrt{x_1+x_2}+\sqrt{x_2+x_3}+\sqrt{x_3+x_4}+\cdots+\sqrt{x_{2002}+x_{2003}}+\sqrt{x_{2003}+x_1}$ 的最小值.

（6）求函数

$$f(x)=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{2-\sin x}+\sqrt{3+\sin x}+\sqrt{3-\sin x}$$

的最大值.

（7）已知 $x,y,z\in(0,+\infty)$，且 $\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}=2$，

求 $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}$ 的最大值.（1990 年首届“希望杯”全国数学邀请赛备选题）

6．用向量方法证明下列不等式：

（1）已知 $a_1^2+a_2^2=1$，$b_1^2+b_2^2=1$ 其中 a_1、a_2、b_1、b_2 均为实数.

求证：$-1\le a_1b_1+a_2b_2\le 1$.

（2） 已知 a、b、$c\in R^+$，且 $a+b+c=1$，求证 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\ge 36$.

（1990 年日本 IMO 选拔试题）

（3） 已知 a、b、$c\in R^+$，求证 $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$.

（第二届友谊杯国际数学邀请赛题）

（4）若 x、y、$z\in R^+$，且 $x+y+z=1$，n 是正整数，求证：

$$\frac{x^4}{y(1-y^n)}+\frac{y^4}{z(1-z^n)}+\frac{z^4}{x(1-x^n)}\ge\frac{3^n}{3^{n+2}-9}.$$

（5）若 x、y、z、λ、$\mu\in R^+$，则 $\frac{x}{\lambda y+\mu z}+\frac{y}{\lambda z+\mu x}+\frac{z}{\lambda x+\mu y}\ge\frac{3}{\lambda+\mu}$.

（6）对所有的正实数 x、y、z，证明：$\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+8zx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+8xy}}\ge 1$.

（2001 年第 42 届 IMO 试题）

7．（1）已知α、$\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，且 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{2}$，求$\alpha$、$\beta$的值.

（2）求值 cos5°+cos77°+cos149°+cos221°+cos293°.

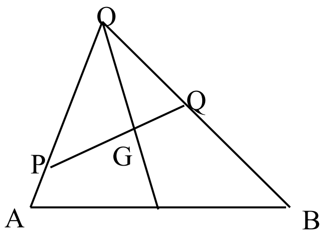
（3）求$\cos\alpha+\cos(\alpha+\dfrac{2\pi}{n})+\cos(\alpha+2\cdot\dfrac{2\pi}{n})+\cdots\cdots+\cos[\alpha+(n-1)\dfrac{2\pi}{n}]$的值.

8．设 a、b 是两个实数，A＝{(x，y)|x＝n，y＝na+b，n 是整数}，B＝{(x，y)|x＝m，y＝$3m^2$+15，m 是整数}，C＝{(x，y)|$x^2+y^2\le144$}是平面 xOy 内的点集合，讨论是否存在 a 和 b，使得：

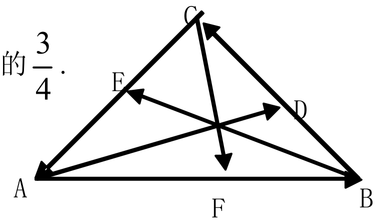
①$A\cap B\neq\phi$ (ϕ表示空集)，②(a，b)∈C 同时成立.（1985 年全国高考理科压轴题）

9．给定正整数 n 和正数 M，对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\le M$ 的所有等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值.（1999 年全国高中数学联赛第一试压轴题）

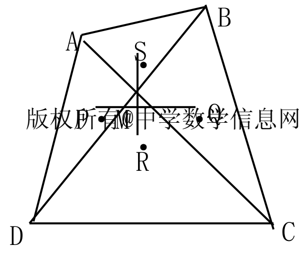
10．（1）如图，G 为ΔAOB 的中线 OM 的中点，PQ 过 G，分别交 OA、OB 于点 P、Q，$\dfrac{OP}{OA}=m$，$\dfrac{OQ}{OB}=n$. 问；$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$的值是否为定值.



（2）试证：三角形三中线的长度的平方和等于三边长度的平方和的$\dfrac{3}{4}$.

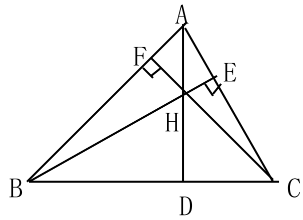


（3）凸四边形 ABCD 的对角线交于点 M，点 P、Q 分别是ΔAMD 和ΔCMB

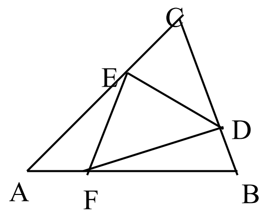


的重心，R、S 分别是ΔDMC 和ΔMAB 的垂心. 求证：PQ⊥RS.

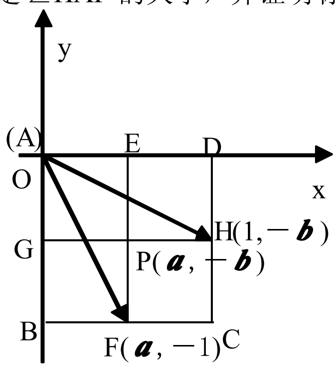
（4）求证三角形三边上的高交于一点.



（5）设D、E、F 分别是ΔABC 的所在各边的三等分点，且BC＝3BD，CA＝3CE 及 AB＝3AF（如右图），证明，ΔABC 和ΔDEF 有相同的重心.



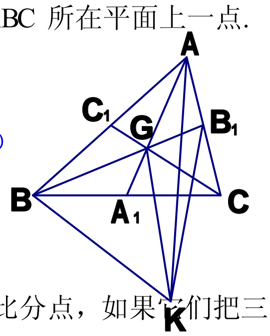
（6）正方形 ABCD 被两条与边平行的线段 EF、GH 分割成四个小矩形，P 是 EF 和 GH 的交点，若矩形 PFCH 的面积恰是矩形 AGPE 的面积的 2 倍，试确定 ∠HAF 的大小，并证明你的结论.（1998 年北京市中学生数学竞赛复赛试题）



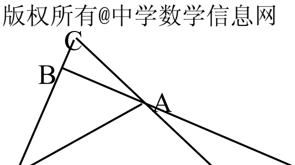
（7）设 H、G、O 分别为ΔABC 的垂心、重心和外心. 又 K 为ΔABC 所在平面上一点.

求证：① $\overrightarrow{KG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC})$；

②用向量法证明 H、G、O 三点共线，且 HG＝2GO.（欧拉定理）

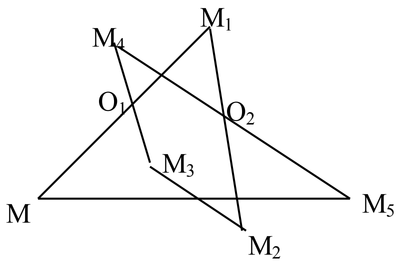


（8）如图，A_1、B_1、C_1 分别是三角形的边 BC、CA、AB 上的定比分点，如果它们把三角形的边

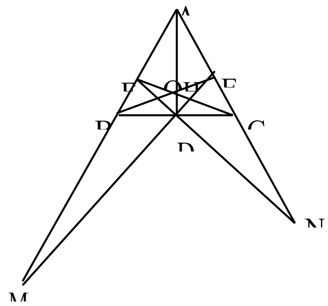


分别分成定比 $m=\dfrac{BA_1}{A_1C}$，$n=\dfrac{CB_1}{B_1A}$，$t=\dfrac{AC_1}{C_1B}$. 那么 A_1、B_1、C_1 三点共线的充要条件是 mnt＝－1.（著名的 Menelaus 定理）

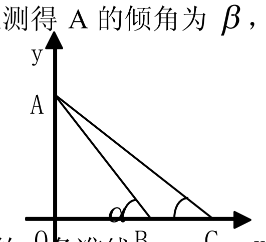
（9）已知三点 O_1、0_2、0_3 及另一点 M，且点 M_1 是点 M 关于 O_1 的对　　称点，点 M_2 是点 M_1 关于 O_2 的对称点，点 M_3 是 M_2 关于 O_3 的对称点，点 M_4 是点 M_3 关于 O_1 的对称点，点 M_5 是点 M_4 关于 O_2 的对称点，点 M_6 是点 M_5 关于 O_3 的对称点，求证：点 M_6 和始点 M 重合.



（10）如图，在ΔABC 中，O 为外心，三条高线交于 H，D、E、F 为垂足，直线 ED、AB 交于 M，直线 FD、AC 交于 N. 求证：（Ⅰ）OB⊥DF，OC⊥DE；(Ⅱ)OH⊥MN.
(2001，全国高中数学联赛)



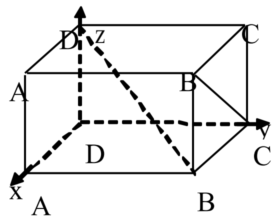
11．（1）充分暴露美国霸权主义、单边主义的滞留在我海南陵水机场的 EP－3 电子侦察机，终以其被大御八块，由租用的"安－124"运输机运回本土而告终，设若该机从日本冲绳美军基地起飞，至我领海外海上空 A 处，它在地面上的投影 O 在我两现代化雷达系统 B、C 两点的延长线上，假定侦察机的高度为 h，从 B 处测得 A 的仰角为 α，从 C 处测得 A 的倾角为 β，CO＝$(2+\sqrt{3})$h，BC＝$2\sqrt{3}$h，试用向量知识求 $\alpha+\beta$ 之值.



（2）椭圆的两焦点分别为 $F_1(0，-1)$、$F_2(0，1)$，直线 y＝4 是椭圆的一条准线.

① 求椭圆的方程；②设点 P 在椭圆上，且$|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|=m\geq 1$，求 $\dfrac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|}$ 的最大值和最小值.

１２．（1）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AA_1=2$，$AB=3$，$AD=a$，求：(Ⅰ)异面直线 B_1C 与 BD_1 所成的角；(Ⅱ)当 a 为何值时，使 $B_1C\perp BD_1$？

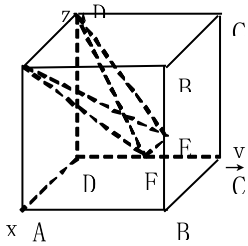


（2）在边长为 2 的正方体 AC_1 中，E、F 分别为 BB_1、CD 的中点.

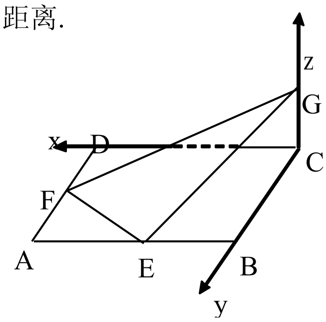
(Ⅰ)求证平面 ADE⊥平面 A_1D_1F；

(Ⅱ)求斜线 A_1F 与平面 A_1D_1E 所成的角；

(Ⅲ)求三棱锥 $F-A_1D_1E$ 的体积.

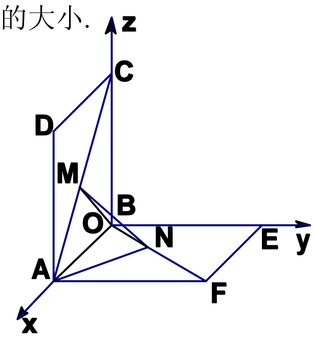


（3）已知 ABCD 是边长为 4 的正方形，E、F 分别是 AB、AD 的中点，GC 垂直于面 ABCD，且 GC＝2，求点 B 到面 EFG 的距离.（1991 年全国高考试题）



(4)（2003 年全国高考试题(理)第 18 题）如图，正方形 ABCD、ABEF 的边长是 1，而且平面 ABCD、

ABEF 互相垂直，点 M 在 AC 上移动，点 N 在 BF 上移动，若 CM＝BN＝a($0<a<\sqrt{2}$).
(Ⅰ)求 MN 的长；(Ⅱ)当 a 为何值时，MN 的长最小；
(Ⅲ)当 MN 长最小时，求面 MNA 与面 MNB 所成的二面角 α 的大小.

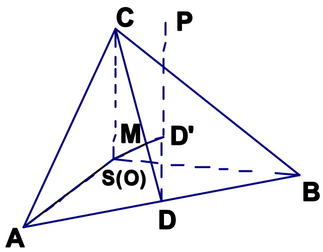


（5）设在四面体 ABCD 中，∠BDC 是直角，D 到平面 ABC 垂线的垂足 S 是ΔABC 的垂心，试证：$(AB+BC+AC)^2\leq 6(AD^2+BD^2+CD^2)$，并说明等号成立时是一个什么四面体？

（第 12 届 IMO 试题 5）

（6）三棱锥 S—ABC 中，侧棱 SA、SB、SC 两两互相垂直，M 为三角形 ABC 的重心，D 为 AB 的中点，作与 SC 平行的直线 DP，证明：

(Ⅰ) DP 与 SM 相交；(Ⅱ)设 DP 与 SM 的交点为 D'，则 D' 为三棱锥 S—ABC 的外接球的球心.（1993 年全国高中数学联赛第一试第三题）



§11 数列

一、数列的基础知识

1．数列$\{a_n\}$的通项a_n与前n项的和S_n的关系

它包括两个方面的问题：一是已知S_n求a_n，二是已知a_n求S_n；

2．递推数列，解决这类问题时一般都要与两类特殊数列相联系，设法转化为等差数列与等比数列的有关问题，然后解决。

常见类型：

类型Ⅰ：$\begin{cases} a_{n+1} = p(n)a_n + q(n) & (p(n)\neq 0) \\ a_1 = a & (a\text{为常数}) \end{cases}$（一阶递归）

其特例为：（1）$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p\neq 0)$ （2）$a_{n+1} = pa_n + q(n) \quad (p\neq 0)$

（3）$a_{n+1} = p(n)a_n + q \quad (p\neq 0)$

解题方法：利用待定系数法构造类似于“等比数列”的新数列。

类型Ⅱ：$\begin{cases} a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n & (p\neq 0, q\neq 0) \\ a_1 = a, a_2 = b & (a, b\text{为常数}) \end{cases}$（二阶递归）

解题方法:利用特征方程$x^2=px+q$,求其根α、β,构造$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$，代入初始值求得A, B。

类型Ⅲ：$a_{n+1}=f(a_n)$其中函数$f(x)$为基本初等函数复合而成。

解题方法：一般情况下，通过构造新数列可转化为前两种类型。

二、等差数列与等比数列

1．定义：

2．通项公式与前n项和公式：

函数的思想：等差数列可以看作是一个一次函数型的函数；等比数列可以看作是一个指数函数型的函数。可以利用函数的思想、观点和方法分析解决有关数列的问题。

三．等差数列与等比数列数列问题的综合性和灵活性如何表现？

数列问题的综合性主要表现在

1．数列中各相关量的关系较为复杂、隐蔽.

2．同一问题中出现有若干个相关数列，既有等差或等比数列，也有非等差，非等比的数列，需相互联系，相互转换.

数列问题的灵活性表现在：

1．需灵活应用递推公式，通项公式，求和公式，寻求已知与所求的关系，减少中间量计算.

2．需灵活选用辅助数列，处理相关数列的关系.

例题讲解

1．已知$(b-c)\log m\ x+(c-a)\log m\ y+(a-b)\log m\ z=0$ ①

(1) 若a、b、c依次成等差数列，且公差不为0，求证x、y、z成等比数列；

(2) 若x、y、z依次成等比数列，且公比不为1，求证a、b、c成等差数列.

2. 数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=a\cdot 2n+b$（$n\in$N），则$\{a_n\}$为等比数列的充要条件是________.

3. 设等差数列｛a_n｝的前 n 项和为 S_n，若 S_7＝56，S_n＝420，a_{n-3}＝34，则 n＝________.

4. 等差数列中,$a_3+a_7-a_{10}=8$,$a_{11}-a_4=4$,求 S_{13}

5. 各项均为实数的等比数列{an}的前 n 项之和为 S_n，若 $S_{10}=10$，$S_{30}=70$，求 S_{40}。

6. 设{a_n}是首项为 1 的正项数列，且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$，(n=1,2,3,…),则它的通项公式是 a_n=________.

7. 已知 $f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$，且 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ 组成等差数列（n 为正偶数），又 $f(1)=n^2$,$f(-1)=n$;

（1）求数列{a_n}的通项 a_n;

（2）试比较 f(0.5)与 3 的大小，并说明理由。

8．在 1 与 2 之间插入个正数 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$，使这 n+2 个正数成等比数列；又在 1 与 2 之间插入个正数 $b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n$，使这 n+2 个正数成等差数列。记 $A_n=a_1a_2a_3\ldots a_n$,$B_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$.

（1）求数列{A_n}和{B_n}的通项；

（2）当 $n\geq7$ 时，比较 A_n 与 B_n 的大小，并证明你的结论。

9. 设任意实数 x,y 满足 $|x|<1,|y|<1$,求证：$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}\geq\frac{2}{1-xy}$ (第19届莫斯科数学竞赛试题)

10. 从 n 个数 $1,a,a^2,\ldots,a^n$ $(a>2)$中拿走若干个数，然后将剩下的数任意分成两个部分，证明：这两部分之和不可能相等

11. 已知 $a_1=\sqrt{2}$，$a_n=\sqrt{2+2a_{n-1}}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

12. 正整数 k，g（k）表示 k 的最大奇因子（例如 g（3）=3，g（20）=5），求 g（1）+ g（2）+ g（3）+……..+ g（2^n）(其中 $n\in N^*$)

13. 将数字 1，2，3，……..，n 填入标号为 1，2，3，……，n 的 n 个方格内，每格一个数字，则标号与数字均不相同的填法有多少种？

14. 用 1，2，3 三个数字写 n 位数，要求数中不出现紧挨着的两个 1，问能构成多少个 n 位数？

15. 设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足 $a_0=1$，$b_0=0$，且$\begin{cases} an_{+1} = 7a_n + 6b_n - 3 \\ b_{n+1} = 8a_{n-1} + 7b_n - 4 \end{cases}$ （n=0，1，2，………．）

证明：a_n（n=0，1，2，…..）是完全平方数

16. 已知 a,b 均为正整数,且 a>b, $\sin\theta = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ (其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$), $A_n=(a^2+b^2)^n \sin n\theta$

求证：对一切正整数 n, $\dfrac{An}{2ab}$均为整数

17. （1）证明：$3-\dfrac{2}{(n-1)!}<\dfrac{2}{2!}+\dfrac{7}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{n^2-2}{n!}<3$；

（2） 求正整数 a，b，c，使得对任意$n\in N^*$（n>2），有

$$b-\frac{c}{(n-2)!}<\frac{2^3-a}{2!}+\frac{3^3-a}{3!}+\cdots\cdots+\frac{n^3-a}{n!}<b$$

18. 设*A*，*E*为正八边形的相对顶点，顶点*A*处有一只青蛙，除顶点 E 外青蛙可以从八边形的任一顶点跳到两相邻顶点中任一个，落到顶点 E 时青蛙就停止跳动，设青蛙从顶点 A 恰好跳 n 次后到 E 的方法数为 a_n，求 a_n

19. $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$表示整数1,2,....，$n$的任意一排列，设$f(n)$为这些排列的数目，使得：（1）$a_1=1$（2）$|a_i-a_{i+1}|\le 2$（$i$=1,2,……,n-1）.确定$f(1996)$是否能被 3 整除

课后练习

1 设数列 $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ 满足 $a_1=a_2=1,a_3=2$，且对任何自然数 n，都有 $a_na_{n+1}a_{n+2}\neq1$，又 $a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，则 $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$的值是____

2 设正数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$满足 $\sqrt{a_na_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1}$ $(n\geqslant2)$且 $a_0=a_1=1$. 求 $\{a_n\}$的通项公式 .

3 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1}+a_n=4(n\geq1)$，且 $a_1=9$，其前 n 项之和为 S_n，则满足不等式 $\left|S_n-n-6\right|<\frac{1}{125}$ 的最小整数 n 是(　　)

(A)5　(B)6　(C)7　(D)8

4 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_8=5a_{13}$ 且 $a_1>0$，S_n为其前项之和，则 S_n中最大的是(　　)

(A) S_{10}　(B) S_{11}　(C) S_{20}　(D) S_{21}

5 等比数列 $\{a_n]$的首项 $a_1=1536$，公比 $q=-\frac{1}{2}$，用 Π_n 表示它的前 n 项之积。则 $\Pi_n(n\in N)$ 最大的是(　　)

(A) Π_9　(B) Π_{11}　(C) Π_{12}　(D) Π_{13}

6 设数列 $\{a_n\}$的前项和 $S_n=2a_n-1$(n=1,2,3,….)，数列 $\{b_n\}$满足 $b_1=3$, $b_{k+1}=a_k+b_k$ (k=1,2,3….).求数列 $\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

7 已知数列 $\{x_n\}$满足 $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant2)$，$x_1=a$, $x_2=b$, 记 $S_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$，则下列结论正确的是(　　)

(A) $x_{100}=-a, S_{100}=2b-a$　(B) $x_{100}=-b, S_{100}=2b-a$

(C) $x_{100}=-b, S_{100}=b-a$　(D) $x_{100}=-a, S_{100}=b-a$

8 设等差数列的首项及公差均为非负整数，项数不少于 3，且各项的和为 97^2，则这样的数列共有(　　)

(A)2 个　(B)3 个　(C)4 个　(D)5 个

9 各项均为实数的等比数列$\{a_n\}$前 n 项和记为 S_n，若 $S_{10}=10,S_{30}=70$，则 S_{40}等于(　　)

(A) 150　　(B) −200　　(C) 150 或−200　　(D)400 或−50

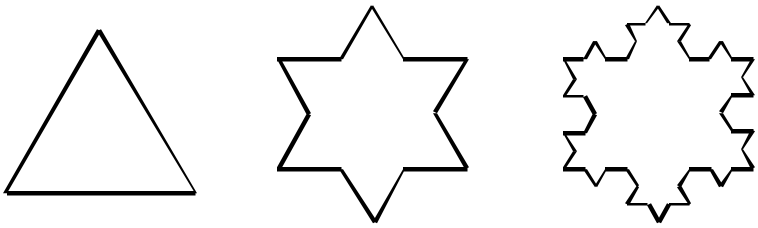
10 等比数列 $a+\log_2 3,a+\log_4 3,a+\log_8 3$ 的公比是____________.

11 设 $S_n=1+2+3+\cdots+n,n\in N$，求 $f(n)=\dfrac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}$ 的最大值.

12 设 $\{a_n\}$ 为等差数列，为 $\{b_n\}$ 等比数列，且 $b_1=a_1^2,b_2=a_2^2,b_3=a_3^2\left(a_1<a_2\right)$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)=\sqrt{2}+1$，试求 $\{a_n\}$的首项和公差。

13 如图，有一列曲线 $P_0,P_1,P_2,\cdots\cdots$ 已知 P_0 所围成的图形是面积为 1 的等边三角形，P_{k+1}是对P_k进行如下操作得到：将 P_k 的每条边三等分，以每边中间部分的线段为边，向外作等边三角形，再将中间部分的线段去掉$(k=0,1,2,\cdots)$ 记S$_n$为曲线P_n所围成图形的面积.

①求数列$\{S_n\}$的通项公式；②求 $\lim\limits_{x\to\infty}S_n$.



P_0　　P_1　　P_2

14 删去正整数数列 1,2,3,……中的所有完全平方数，得到一个新数列．这个新数列的第 2003 项是(　　) (A)2046　　(B)2047　　(C)2048　　(D)2049

15 已知数列 $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n\cdots$,满足关系式 $(3-a_{n+1})(6+a_n)=18$ 且 $a_0=3$，则 $\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{a_i}$ 的值是______。

16 在平面直角坐标系 xoy中，y轴正半轴上的点列$\{A_n\}$与曲线 $y=\sqrt{2x}$（$x\geqslant 0$）上的点列 $\{B_n\}$ 满足 $|OA_n|=|OB_n|=\dfrac{1}{n}$，直线 A_nB_n 在 X 轴上的截距为 a_n，点 B_n 的横坐标为 b_n，$n\in N^*$。

（Ⅰ）证明$a_n > a_{n+1} > 4$，$n \in N^*$。

（Ⅱ）证明有$n_0 \in N^*$，使得对$\forall n > n_0$都有$\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\ldots+\frac{b_n}{b_{n-1}}+\frac{b_{n+1}}{b_n} < n-2004$。

课后练习答案

1．200, 2． $a_n=\left(2^1-1\right)^2\left(2^2-1\right)^2\ldots\left(2^n-1\right)^2$, 3．C , 4．C , 5．C

6． $T_n=2n+2^n-1$, 7．A, 8．C, 9．A, 10． $\frac{1}{3}$

11．当 n=8 时，f(n)取得最大值，为$\frac{1}{50}$,

12． $a_1=-\sqrt{2}, d=2\sqrt{2}-2$

13．略

14．C

15． $\frac{2^{n+2}-n-3}{3}$

16．略

§12 递推数列

1、概念：①、递归式：一个数列 $\{a_n\}$ 中的第 n 项 a_n 与它前面若干项 a_{n-1}，a_{n-2}，…，a_{n-k}（$k<n$）的关系式称为递归式。 ②、递归数列：由递归式和初始值确定的数列成为递归数列。

2、常用方法：累加法，迭代法，代换法，代入法等。

3、思想策略：构造新数列的思想。

4、常见类型：

类型Ⅰ：$\begin{cases} a_{n+1}=p(n)a_n+q(n) \quad (p(n)\neq 0) \\ a_1=a \quad (a\text{为常数}) \end{cases}$（一阶递归）

其特例为：（1）$a_{n+1}=pa_n+q \quad (p\neq 0)$ （2）$a_{n+1}=pa_n+q(n) \quad (p\neq 0)$

（3）$a_{n+1}=p(n)a_n+q \quad (p\neq 0)$

解题方法：利用待定系数法构造类似于“等比数列”的新数列。

类型Ⅱ：$\begin{cases} a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \quad (p\neq 0, q\neq 0) \\ a_1=a, a_2=b(a,b\text{为常数}) \end{cases}$（二阶递归）

解题方法：利用特征方程 $x^2=px+q$，求其根 α、β，构造 $a_n=A\alpha^n+B\beta^n$，代入初始值求得 A,B。

类型Ⅲ：$a_{n+1}=f(a_n)$ 其中函数 $f(x)$ 为基本初等函数复合而成。

解题方法：一般情况下，通过构造新数列可转化为前两种类型。

例题讲解

1．已知数列 $\{a_n\}$ 满足以下递归关系 $\begin{cases} a_{n+1}=3a_n+4 \\ a_1=1 \end{cases}$，求通项 a_n。

2．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+(2n-1) \\ a_1=2 \end{cases}$，求通项 a_n。

3．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\begin{cases} a_{n+1}=na_n+2 \quad (n\geq 2) \\ a_1=1 \end{cases}$，求通项 a_n。

4．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\begin{cases} a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n \\ a_1=1, a_2=2 \end{cases}$，求通项 a_n。

5．由自然数组成的数列$\{a_n\}$，满足$a_1=1$，$a_{m+n}=a_m+a_n+mn$，求a_n。

6．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=10$，$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n^4}{a_n}^4$（$n\geq 1$），求$a_n$。

7．已知$f(x)=\dfrac{x}{a(x+2)}$，且$f(x_0)=\dfrac{1}{2}$，方程$f(x)=x$有唯一解，设$x_n=f(x_{n-1})$（$n\in N$），求x_n。

8．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$，求$a_n$。

9．设正数列$\{a_n\}$满足$a_n^2\leq a_n-a_{n+1}$，证明$a_n\leq\dfrac{1}{n+2}$（$n=2$，3，4，…）

课后练习

1．已知数列$\{a_n\}$满足以下递归关系，求a_n。

（1）$a_1=1$，$a_{n+1}=5a_n+12$（$n\in N$）

（2）$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n-1$（$n\in N$）

（3）$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n+1$（$n\in N$）

（4）$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{n-1}{n}a_n+\frac{2}{n}$（$n\in N$）

（5）$a_1=1$，$S_n=n^2a_n$（S_n为前n项和）

（6）$a_1=10$，$a_{n+1}=\sqrt[4]{10a_n}$（$n\geq 2, n\in N$）

（7）$\begin{cases} a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n \\ a_1=a_2=1 \end{cases}$

2．已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$中，$a_1=-10$，$b_1=-13$，且$a_{n+1}=-2a_n+4b_n$，$b_{n+1}=-5a_n+7b_n$，求a_n和b_n。

3．已知$x_0=0$，$x_{n+1}=5x_n+\sqrt{14x_n^2+1}$（$n=0$，1，2，3，4，…），证明$x_n\in N$（$n\in N$）。

4．已知数列$\{a_n\}$满足：$a_n=3^n\cos n(\arccos\frac{1}{3})$，证明$a_n$是不能被 3 整除的整数。

§13 数学归纳法

数学归纳法是用于证明与正整数n有关的数学命题的正确性的一种严格的推理方法．在数学竞赛中占有很重要的地位．

1．数学归纳法的基本形式

（1）第一数学归纳法

设$P(n)$是一个与正整数有关的命题，如果

①当$n=n_0$（$n_0\in N$）时，$P(n)$成立；

②假设$n=k(k\ge n_0,k\in N)$成立，由此推得$n=k+1$时，$P(n)$也成立，那么，根据①②对一切正整数$n\ge n_0$时，$P(n)$成立．

（2）第二数学归纳法

设$P(n)$是一个与正整数有关的命题，如果

①当$n=n_0$（$n_0\in N$）时，$P(n)$成立；

②假设$n\le k(k\ge n_0,k\in N)$成立，由此推得$n=k+1$时，$P(n)$也成立，那么，根据①②对一切正整数$n\ge n_0$时，$P(n)$成立．

2．数学归纳法的其他形式

（1）跳跃数学归纳法

①当$n=1,2,3,\cdots,l$时，$P(1),P(2),P(3),\cdots,P(l)$成立，

②假设$n=k$时$P(k)$成立，由此推得$n=k+l$时，$P(n)$也成立，那么，根据①②对一切正整数$n\ge 1$时，$P(n)$成立．

（2）反向数学归纳法

设$P(n)$是一个与正整数有关的命题，如果

① $P(n)$ 对无限多个正整数 n 成立；

②假设 $n=k$ 时，命题 $P(k)$ 成立，则当 $n=k-1$ 时命题 $P(k-1)$ 也成立，那么根据①②对一切正整数 $n\geq 1$ 时，$P(n)$ 成立．

3．应用数学归纳法的技巧

（1）起点前移：有些命题对一切大于等于 1 的正整数正整数 n 都成立，但命题本身对 $n=0$ 也成立，而且验证起来比验证 $n=1$ 时容易，因此用验证 $n=0$ 成立代替验证 $n=1$，同理，其他起点也可以前移，只要前移的起点成立且容易验证就可以．因而为了便于起步，有意前移起点．

（2）起点增多：有些命题在由 $n=k$ 向 $n=k+1$ 跨进时，需要经其他特殊情形作为基础，此时往往需要补充验证某些特殊情形，因此需要适当增多起点．

（3）加大跨度：有些命题为了减少归纳中的困难，适当可以改变跨度，但注意起点也应相应增多．

（4）选择合适的假设方式：归纳假设为一定要拘泥于“假设 $n=k$ 时命题成立”不可，需要根据题意采取第一、第二、跳跃、反向数学归纳法中的某一形式，灵活选择使用．

（5）变换命题：有些命题在用数学归纳证明时，需要引进一个辅助命题帮助证明，或者需要改变命题即将命题一般化或加强命题才能满足归纳的需要，才能顺利进行证明．

5．归纳、猜想和证明

在数学中经常通过特例或根据一部分对象得出的结论可能是正确的，也可能是错误的，这种不严格的推理方法称为不完全归纳法．不完全归纳法得出的结论，只能是一种猜想，其正确与否，必须进一步检验或证明，经常采用数学归纳法证明．不完全归纳法是发现规律、解决问题极好的方法．

例题讲解

1．用数学归纳法证明：

$$(1+1)(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{7})\cdots(1+\frac{1}{3n-2})>\sqrt[3]{3n+1}\quad（n\in N^*,n\geq 1）$$

2．已知对任意 $n\in N^*$，$n\geq 1$，$a_n>0$ 且 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$，求证：$a_n=n$．

3．如果正整数n不是 6 的倍数，则1986^n-1不是 7 的倍数．

4．设$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是正数，证明$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$．

5．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，对于区间 $[a,b]$ 内的任意两数 c,d 均有 $f(\frac{c+d}{2})\le\frac{1}{2}[f(c)+f(d)]$．求证：对于任意$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，均有

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})\le\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

6．试证：对一切大于等于 1 的自然数n都有

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

7．试证：对一切自然数n（$n\geq 1$）都有$2^n+2>n^2$．

8．证明：任一正方形可以剖分成任意个数多于5个的正方形．

9．设$0<a<1$，$a_1=1+a$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}+a$，求证：对一切$n\in N$均有$a_n>1$

10．已知$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}^2+(-1)^{n-1}}{a_n}$，求证：对一切$n\in N$，$a_n$都是整数．

11．设$f(n)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，是否存在关于正整数$n$的函数$g(n)$使等式$f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)=g(n)[f(n)-1]$对于$n\geq 2$的一切自然数都成立？并证明你的结

论．

12．设整数数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=12$，$a_3=20$，且$a_{n+3}=2a_{n+2}+2a_{n+1}-a_n$．证明：任意正整数$n$，$1+4a_na_{n+1}$是一个整数的平方．

课后练习

1．证明$n\in N$时，$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{5n-1}$能被31整除．

2．设n不小于6的自然数，证明：可以将一个正三角形分成n个较小的正三角形．

3．用数学归纳法证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<2$

4．设n为自然数，求证：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$.

5．对于自然数n（$n\geq 3$），求证：$n^{n+1}>(n+1)^n$.

6．已知$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+(-1)^{n-1}}{a_n}$，求证：对于一切$n\in N^*$，$a_n$是整数.

7．设有2^n个球分成了许多堆，我们可以任意选甲、乙两堆来按照以下规则挪动：若甲戴盆望天的球数p不小于乙堆的球数q，则从甲堆拿q个球放堆乙堆，这样算是挪动一次．证明：可以经过有限次挪动把所有的球合并成一堆.

8．已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=3$，$a_2=8$，$4(a_{n-1}+a_{n-2})=3a_n+5n^2-24n+20$（$n\ge 3$），试证：$a_n=n^2+2^n$.

§14 不等式的证明

不等式在数学中占有重要地位，由于其证明的困难性和方法的多样性，而成为竞赛和高考的热门题型.

证明不等式就是对不等式的左右两边或条件与结论进行代数变形和化归，而变形的依据是不等式的性质，不等式的性分类罗列如下：

不等式的性质：$a\ge b\Leftrightarrow a-b>0,a<b\Leftrightarrow a-b<0.$这是不等式的定义，也是比较法的依据.

对一个不等式进行变形的性质：

（1）$a>b\Leftrightarrow b<a$（对称性）

（2）$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$（加法保序性）

（3）$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc;a>b,c<0\Rightarrow ac<bc.$

（4）$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n,\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in N^*).$

对两个以上不等式进行运算的性质.

（1）$a>b,b>c\Rightarrow a>c$（传递性）.这是放缩法的依据.

（2）$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d.$

（3）$a>b,c<d\Rightarrow a-c>b-d.$

（4）$a>b>0,d>c>0,\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d},ad>bc.$

含绝对值不等式的性质：

（1）$|x|\le a(a>0)\Leftrightarrow x^2\le a^2\Leftrightarrow -a\le x\le a.$

（2）$|x|\ge a(a>0)\Leftrightarrow x^2\ge a^2\Leftrightarrow x\ge a$或$x\le -a.$

（3）$||a|-|b||\le|a\pm b|\le|a|+|b|$（三角不等式）.

（4）$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\le|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

证明不等式的常用方法有：比较法、放缩法、变量代换法、反证法、数学归纳法、构造函数方法等.当然在证题过程中，常可“由因导果”或“执果索因”.前者我们称之为综合法；后者称为分析法.综合法和分析法是解决一切数学问题的常用策略，分析问题时，我们往往用分析法，而整理结果时多用综合法，这两者并非证明不等式的特有方法，只是在不等式证明中使用得更为突出而已.此外，具体地证明一个不等式时，可能交替使用多种方法.

例题讲解

1．$a,b,c>0,$求证：$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ge 6abc.$

2．$a,b,c>0$，求证：$a^ab^bc^c\ge(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

3．：$a,b,c\in R^+,$求证$a+b+c\le\dfrac{a^2+b^2}{2c}+\dfrac{b^2+c^2}{2a}+\dfrac{c^2+a^2}{2b}\le\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}.$

4．设$a_1,a_2,\cdots,a_n\in N^*$，且各不相同，

求证：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\le a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$..

5．利用基本不等式证明$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca.$

6．已知$a+b=1,a,b\ge 0,$求证：$a^4+b^4\ge\frac{1}{8}.$

7．利用排序不等式证明$G_n\le A_n$

8．证明：对于任意正整数 **R**，有$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}.$

9．n 为正整数，证明：$n[(1+n)^{\frac{1}{n}}-1]<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<n-(n-1)n^{\frac{-1}{n-1}}$.

课后练习

1.选择题

(1)方程 $x^2-y^2=105$ 的正整数解有（　　）.

（A）一组　（B）二组　（C）三组　（D）四组

(2)在 0,1,2,…，50 这 51 个整数中，能同时被 2，3，4 整除的有（　　）.

（A）3 个　（B）4 个　（C）5 个　（D）6 个

2．填空题

（1）的个位数分别为_________及_________.

(2)满足不 $3^{1686}, 7^{2000}$ 等式 10^4≤A≤10^5的整数 A 的个数是 x×10^4+1，则 x 的值________.

(3)已知整数 y 被 7 除余数为 5,那么 y^3被 7 除时余数为________.

(4)求出任何一组满足方程 $x^2-51y^2=1$ 的自然数解 x 和 y________.

3.求三个正整数 x、y、z 满足

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$.

4．在数列 4，8，17，77，97，106，125，238 中相邻若干个数之和是 3 的倍数，而不是 9 的倍数的数组共有多少组？

5．求 $\sqrt{y-\frac{1}{5}}+\sqrt{x-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$ 的整数解.

6．求证 $N=8888^{2222}+7777^{3333}$ 可被 37 整除.

7．求满足条件 $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$ 的整数 x，y 的所有可能的值.

8．已知直角三角形的两直角边长分别为 l 厘米、m 厘米，斜边长为 n 厘米，且 l，m，n 均为正整数，l 为质数.证明：2（l+m+n）是完全平方数.

9.如果 p、q、$\frac{2p-q}{q}$、$\frac{2q-1}{p}$ 都是整数，并且 p＞1，q＞1，试求 p+q 的值.

课后练习答案

1.D.C.

2.(1)9 及 1.

(2)9.

(3)4.

(4)原方程可变形为 $x^2=(7y+1)^2+2y(y-7)$，令 y=7 可得 x=50.

3.不妨设 x≤y≤z,则$\frac{3}{x} \phi \frac{4}{5}$,故 x≤3.又有$\frac{1}{x} \pi \frac{4}{5}$,故 x≥2.若 x=2,则$\frac{2}{y} \phi \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$,故 y≤6.又有$\frac{1}{y} \phi \frac{3}{10}$,故 y≥4.若 y=4,则 z=20.若 y=5,则 z=10.若 y=6,则 z 无整数解.若 x=3,类似可以确定 3≤y≤4,y=3 或 4,z 都不能是整数.

4.可仿例 2 解.

5. 分析：左边三项直接用基本不等式显然不行，考察到不等式的对称性，可用轮换的方法.

略解：$a^2+b^2 \ge 2ab$,同理$b^2+c^2 \ge 2bc, c^2+a^2 \ge 2ca$；三式相加再除以 2 即得证.

评述：（1）利用基本不等式时，除了本题的轮换外，一般还须掌握添项、连用等技巧.

如$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1} \ge x_1+x_2+\cdots+x_n$，可在不等式两边同时加上$x_2+x_3+\cdots+x_n+x_1$.

再如证$(a+1)(b+1)(a+c)^3(b+c)^3 \ge 256a^2b^2c^3\ (a,b,c>0)$时，可连续使用基本不等式.

（2）基本不等式有各种变式 如$(\frac{a+b}{2})^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$等.但其本质特征不等式两边的次数及系数是相等的.如上式左右两边次数均为 2，系数和为 1.

6.8888≡8(mod37),∴8888^{2222}≡8^2(mod37).

7777≡7(mod37),7777^{3333}≡7^3(mod37),$8888^{2222}+7777^{3333}$≡(8^2+7^3)(mod37),而8^2+7^3=407,37|407,∴37|N.

7.简解:原方程变形为 $3x^2-(3y+7)x+3y^2-7y=0$ 由关于 x 的二次方程有解的条件△≥0 及 y 为整数可得 0≤y≤5,即 y=0,1,2,3,4,5.逐一代入原方程可知,原方程仅有两组解(4,5)、(5,4).

8.∵$l^2+m^2=n^2$,∴$l^2=(n+m)(n-m)$.∵l 为质数,且 n+m>n-m>0,∴n+m=l^2,n-m=1.于是 l^2=n+m=(m+1)+m=2m+1,2m=l^2-1,2(l+m+1)=2l+2+2m=l^2+2l+1=$(l+1)^2$.即 2(l+m+1)是完全平方数.

9.易知 p≠q,不妨设 p>q.令$\frac{2p-1}{q}=m, \frac{2q-1}{p}$=n,则 m>n 由此可得不定方程(4-mn)p=m+2,解此方程可得 p、q 之值.

例题答案：

1. 证明：∵ $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc$

$$=a(b^2+c^2-2bc)+b(a^2+c^2-2ac)+c(a^2+b^2-2ab)$$
$$=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$
$$\geq 0$$

$\therefore ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 6abc.$

评述：（1）本题所证不等式为对称式（任意互换两个字母，不等式不变），在因式分解或

配方时，往往采用轮换技巧.再如证明 $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ 时，可将 $a^2+b^2-(ab+bc+ca)$ 配方为 $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$，亦可利用 $a^2+b^2\ge 2ab$, $b^2+c^2\ge 2bc, c^2+a^2\ge 2ca$，3 式相加证明.（2）本题亦可连用两次基本不等式获证.

2.分析：显然不等式两边为正，且是指数式，故尝试用商较法.

不等式关于 a,b,c 对称，不妨 $a\ge b\ge c$,则$a-b,b-c,a-c\in R^+$，且 $\frac{a}{b},\frac{b}{c}$，$\frac{a}{c}$ 都大于等于 1.

$$\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=a^{\frac{2a-b-c}{3}}b^{\frac{2b-a-c}{3}}c^{\frac{2c-a-b}{3}}=a^{\frac{a-b}{3}}\cdot a^{\frac{a-c}{3}}\cdot b^{\frac{b-a}{3}}\cdot b^{\frac{b-c}{3}}\cdot c^{\frac{c-a}{3}}\cdot c^{\frac{c-b}{3}}$$

$$=(\frac{a}{b})^{\frac{a-b}{3}}\cdot(\frac{b}{c})^{\frac{b-c}{3}}\cdot(\frac{a}{c})^{\frac{a-c}{3}}\ge 1.$$

评述：（1）证明对称不等式时，不妨假定 n 个字母的大小顺序，可方便解题.

（2）本题可作如下推广：若 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, 则$a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}\ge (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}$.

（3）本题还可用其他方法得证。因 $a^a b^b\ge a^b b^a$，同理 $b^b c^c\ge b^c c^b, c^c a^a\ge c^a a^c$，

另 $a^a b^b c^c\ge a^a b^b c^c$，4 式相乘即得证.

（4）设 $a\ge b\ge c\ge 0$,则$\lg a\ge\lg b\ge\lg c$.例 3 等价于 $a\lg a+b\lg b\ge a\lg b+b\lg a$,类似例 4 可证 $a\lg a+b\lg b+c\lg c\ge a\lg b+b\lg c+c\lg a\ge a\lg c+b\lg b+c\lg a$.事实上，一般地有排序不等式（排序原理）：

设有两个有序数组 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n, b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$，则 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$（顺序和）

$\ge a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}$（乱序和）

$\ge a_1b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$（逆序和）

其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$是1,2,$\cdots$,n 的任一排列.当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时等号成立.

排序不等式应用较为广泛（其证明略），它的应用技巧是将不等式两边转化为两个有序数组的积的形式.如 $a,b,c\in R^+$时, $a^3+b^3+c^3\ge a^2b+b^2c+c^2a\Leftrightarrow a^2\cdot a+b^2\cdot b+c^2\cdot c$

$\geq a^2\cdot b+b^2\cdot c+c^2\cdot a;\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c\Leftrightarrow a^2\cdot\frac{1}{b}+b^2\cdot\frac{1}{c}+c^2\cdot\frac{1}{a}\geq a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}.$

3.思路分析：中间式子中每项均为两个式子的和，将它们拆开，再用排序不等式证明.

不妨设 $a\geq b\geq c$,则$a^2\geq b^2\geq c^2,\frac{1}{c}\geq\frac{1}{b}\geq\frac{1}{a}$，则 $a^2\cdot\frac{1}{c}+b^2\cdot\frac{1}{a}+c^2\cdot\frac{1}{b}$（乱序和）$\geq a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}$（逆序和），同理 $a^2\cdot\frac{1}{c}+b^2\cdot\frac{1}{a}+c^2\cdot\frac{1}{b}$（乱序和）$\geq a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}$（逆序和）两式相加再除以 2，即得原式中第一个不等式.再考虑数组 $a^3\geq b^3\geq c^3$及$\frac{1}{bc}\geq\frac{1}{ac}\geq\frac{1}{ab}$，仿上可证第二个不等式.

4.分析：不等式右边各项$\frac{a_i}{i^2}=a_i\cdot\frac{1}{i^2}$；可理解为两数之积，尝试用排序不等式.

设$b_1,b_2,\cdots,b_n$是$a_1,a_2,\cdots,a_n$的重新排列，满足 $b_1<b_2<\cdots<b_n$，

又$1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\cdots>\frac{1}{n^2}$.

所以 $a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\geq b_1+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{3^2}+\cdots+\frac{b_n}{n^2}$.由于 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 是互不相同的正整数，故 $b_1\geq 1,b_2\geq 2,\cdots,b_n\geq n$.从而 $b_1+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{3^2}+\cdots+\frac{b_n}{n^2}\geq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，原式得证.

评述：排序不等式应用广泛，例如可证我们熟悉的基本不等式，$a^2+b^2\geq a\cdot b+b\cdot a$,

$$a^3+b^3+c^3\geq a^2\cdot b+b^2\cdot c+c^2\cdot a=a\cdot ab+b\cdot bc+c\cdot ca\geq a\cdot bc+b\cdot ac+c\cdot ab=3abc.$$

5.思路分析：左边三项直接用基本不等式显然不行，考察到不等式的对称性，可用轮换的方法.

$a^2+b^2\geq 2ab$,同理$b^2+c^3\geq 2bc,c^2+a^2\geq 2ca$；三式相加再除以 2 即得证.

评述：（1）利用基本不等式时，除了本题的轮换外，一般还须掌握添项、连用等技巧.

如$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}\geq x_1+x_2+\cdots+x_n$，可在不等式两边同时加上 $x_2+x_3+\cdots+x_n+x_1$.

再如证$(a+1)(b+1)(a+c)^3(b+c)^3\geq 256a^2b^2c^3(a,b,c>0)$时，可连续使用基本不等式.

（2）基本不等式有各种变式　如$(\frac{a+b}{2})^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$等.但其本质特征不等式两边的次数及系数是相等的.如上式左右两边次数均为 2，系数和为 1.

6.　思路分析：不等式左边是 a、b的 4 次式，右边为常数$\frac{1}{8}$，如何也转化为 a、b的 4 次式呢.

要证 $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$,即证 $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}(a+b)^4$.

评述：（1）本题方法具有一定的普遍性.如已知 $x_1+x_2+x_3=1, x_i\geq 0$, 求证：$x_1^3+x_2^3+x_3^3\geq\frac{1}{3}$.右侧的 $\frac{1}{3}$ 可理解为 $\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^3$.再如已知 $x_1+x_2+x_3=0$，求证：$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\leq 0$，此处可以把 0 理解为 $\frac{3}{8}(x_1+x_2+x_3)^2$，当然本题另有简使证法.

（2）基本不等式实际上是均值不等式的特例.（一般地，对于 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots a_n$）

调和平均 $H_n=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$

几何平均 $G_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$

算术平均 $A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

平方平均 $Q_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{2}}$

这四个平均值有以下关系：$H_n\leq G_n\leq A_n\leq Q_n$，其中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

7. 证明: 令 $b_i=\frac{a_i}{G_n},(i=1,2,\cdots,n)$ 则 $b_1b_2\cdots b_n=1$，故可取 $x_1,x_2,\cdots x_n>0$，使得

$b_1=\frac{x_1}{x_2},b_2=\frac{x_2}{x_3},\cdots,b_{n-1}=\frac{x_{n-1}}{x_n},b_n=\frac{x_n}{x_1}$ 由排序不等式有：

$b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}$（乱序和）

$\geq x_1\cdot\frac{1}{x_1}+x_2\cdot\frac{1}{x_2}+\cdots+x_n\cdot\frac{1}{x_n}$（逆序和）

$=n$,

$\therefore\frac{a_1}{G_n}+\frac{a_2}{G_n}+\cdots+\frac{a_n}{G_n}\geq n$,即 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq G_n$.

评述:对$\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}$各数利用算术平均大于等于几何平均即可得，$G_n \le A_n$.

8. 分析:原不等式等价于$\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n}<1+\frac{1}{n+1}$，故可设法使其左边转化为n个数的几何平均，而右边为其算术平均.

$$\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n}=\sqrt[n+1]{\underbrace{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}_{n个}\cdot 1}<\frac{\underbrace{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}_{n+1}+1}{}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}.$$

评述:（1）利用均值不等式证明不等式的关键是通过分拆和转化，使其两边与均值不等式形式相近.类似可证$(1+\frac{1}{n})^{n+1}<(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$.

（2）本题亦可通过逐项展开并比较对应项的大小而获证，但较繁.

9.证明:先证左边不等式

$$n[(1+n)^{\frac{1}{n}}-1]<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Leftrightarrow(1+n)^{\frac{1}{n}}-1<\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$$

$$\Leftrightarrow\ (1+n)^{\frac{1}{n}}<\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+n}{n}$$

$$\Leftrightarrow(1+n)^{\frac{1}{n}}<\frac{(1+1)+(\frac{1}{2}+1)+(\frac{1}{3}+1)+\cdots+(\frac{1}{n}+1)}{n}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[n]{1+n}<\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}}{n}\qquad(*)$$

$$\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}}{n}>\sqrt[n]{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}}=\sqrt[n]{n+1}.$$

∴ （*）式成立，故原左边不等式成立.

其次证右边不等式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<n-(n-1)\cdot n^{-\frac{1}{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow n^{-\frac{1}{n-1}}<\frac{n-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})}{n-1}\Leftrightarrow\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}<\frac{(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{3})+\cdots+(1-\frac{1}{n})}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}} < \frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}}{n-1} \qquad (**)$$

（**）式恰符合均值不等式，故原不等式右边不等号成立.

§15 不等式的应用

1．排序不等式（又称排序原理）

设有两个有序数组 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ 及 $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$.

则 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$（同序和）

$\geq a_1b_{j1}+a_2b_{j2}+\cdots+a_nb_{jn}$（乱序和）

$\geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$（逆序和）

其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 1，2，…，n 的任一排列．当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时等号（对任一排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$）成立.

2．**应用排序不等式可证明"平均不等式"：**

设有 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均数和几何平均数分别是

$A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 和 $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

此外，还有调和平均数（在光学及电路分析中要用到

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

和平方平均（在统计学及误差分析中用到）

$Q_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$ 这四个平均值有以下关系 $H_n\leq G_n\leq A_n\leq Q_n$. ⊛

3．**应用算术平均数——几何平均数不等式，可用来证明下述重要不等式.**

柯西（Cavchy）不等式：设 a_1、a_2、a_3，…，a_n 是任意实数，则

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

等号当且仅当 $b_i=ka_i$（k 为常数，$i=1,2,\cdots,n$）时成立.

4．**利用排序不等式还可证明下述重要不等式.**

切比雪夫不等式：若 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$，$b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$，

则 $\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}\geq\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$.

例题讲解

1．$a,b,c>0$，求证：$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 6abc.$

2． $a,b,c>0$，求证：$a^a b^b c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

3．： $a,b,c\in R^+$, 求证 $a+b+c\le \frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\le \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$.

4．设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in N^*$，且各不相同，

求证：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\le a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$..

5．利用基本不等式证明$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca.$

6．已知$a+b=1,a,b\ge 0,$求证：$a^4+b^4\ge \frac{1}{8}.$

7．利用排序不等式证明$G_n\le A_n$

8．证明：对于任意正整数 **R**，有$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}.$

9．n为正整数，证明：$n[(1+n)^{\frac{1}{n}}-1]<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<n-(n-1)n^{\frac{-1}{n-1}}.$

例题答案：

1. 证明：∵ $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc$

$$=a(b^2+c^2-2bc)+b(a^2+c^2-2ac)+c(a^2+b^2-2ab)$$
$$=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$
$$\geq 0$$

$$\therefore ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 6abc.$$

评述：（1）本题所证不等式为对称式（任意互换两个字母，不等式不变），在因式分解或配方时，往往采用轮换技巧.再如证明 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ 时，可将 $a^2+b^2-(ab+bc+ca)$ 配方为 $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$，亦可利用 $a^2+b^2\geq 2ab,$ $b^2+c^2\geq 2bc,c^2+a^2\geq 2ca$，3 式相加证明.（2）本题亦可连用两次基本不等式获证.

2.分析：显然不等式两边为正，且是指数式，故尝试用商较法.

不等式关于 a,b,c 对称，不妨 $a\geq b\geq c$,则$a-b,b-c,a-c\in R^+$，且 $\frac{a}{b},\frac{b}{c}$，$\frac{a}{c}$ 都大于等于 1.

$$\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=a^{\frac{2a-b-c}{3}}b^{\frac{2b-a-c}{3}}c^{\frac{2c-a-b}{3}}=a^{\frac{a-b}{3}}\cdot a^{\frac{a-c}{3}}\cdot b^{\frac{b-a}{3}}\cdot b^{\frac{b-c}{3}}\cdot c^{\frac{c-a}{3}}\cdot c^{\frac{c-b}{3}}$$
$$=(\frac{a}{b})^{\frac{a-b}{3}}\cdot(\frac{b}{c})^{\frac{b-c}{3}}\cdot(\frac{a}{c})^{\frac{a-c}{3}}\geq 1.$$

评述：（1）证明对称不等式时，不妨假定 n 个字母的大小顺序，可方便解题.

（2）本题可作如下推广：若 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,则$a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}\geq (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}$.

（3）本题还可用其他方法得证。因 $a^a b^b\geq a^b b^a$，同理 $b^b c^c\geq b^c c^b,c^c a^a\geq c^a a^c$，

另 $a^a b^b c^c\geq a^a b^b c^c$，4 式相乘即得证.

（4）设 $a\geq b\geq c\geq 0,$则$\lg a\geq \lg b\geq \lg c.$例 3 等价于 $a\lg a+b\lg b\geq a\lg b+b\lg a,$类似例 4 可证

$a\lg a+b\lg b+c\lg c\ge a\lg b+b\lg c+c\lg a\ge a\lg c+b\lg b+c\lg a$.事实上，一般地有排序不等式（排序原理）：

设有两个有序数组 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n, b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$，则 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$（顺序和）

$\ge a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}$（乱序和）

$\ge a_1b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$（逆序和）

其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列.当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时等号成立.

排序不等式应用较为广泛（其证明略），它的应用技巧是将不等式两边转化为两个有序数组的积的形式.如 $a,b,c\in R^+$ 时，$a^3+b^3+c^3\ge a^2b+b^2c+c^2a\Leftrightarrow a^2\cdot a+b^2\cdot b+c^2\cdot c\ge a^2\cdot b+b^2\cdot c+c^2\cdot a$；$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c\Leftrightarrow a^2\cdot\frac{1}{b}+b^2\cdot\frac{1}{c}+c^2\cdot\frac{1}{a}\ge a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}$.

3.思路分析：中间式子中每项均为两个式子的和，将它们拆开，再用排序不等式证明.

不妨设 $a\ge b\ge c$，则 $a^2\ge b^2\ge c^2, \frac{1}{c}\ge\frac{1}{b}\ge\frac{1}{a}$，则 $a^2\cdot\frac{1}{c}+b^2\cdot\frac{1}{a}+c^2\cdot\frac{1}{b}$（乱序和）$\ge a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}$（逆序和），同理 $a^2\cdot\frac{1}{c}+b^2\cdot\frac{1}{a}+c^2\cdot\frac{1}{b}$（乱序和）$\ge a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}$（逆序和）两式相加再除以 2，即得原式中第一个不等式.再考虑数组 $a^3\ge b^3\ge c^3$ 及 $\frac{1}{bc}\ge\frac{1}{ac}\ge\frac{1}{ab}$，仿上可证第二个不等式.

4.分析：不等式右边各项 $\frac{a_i}{i^2}=a_i\cdot\frac{1}{i^2}$；可理解为两数之积，尝试用排序不等式.

设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的重新排列，满足 $b_1<b_2<\cdots<b_n$，

又 $1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\cdots>\frac{1}{n^2}$.

所以 $a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\ge b_1+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{3^2}+\cdots+\frac{b_n}{n^2}$.由于 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 是互不相同的正整数，故 $b_1\ge 1, b_2\ge 2,\cdots,b_n\ge n$.从而 $b_1+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{3^2}+\cdots+\frac{b_n}{n^2}\ge 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，原式得证.

评述：排序不等式应用广泛，例如可证我们熟悉的基本不等式，$a^2+b^2\ge a\cdot b+b\cdot a$,

$$a^3+b^3+c^3\ge a^2\cdot b+b^2\cdot c+c^2\cdot a=a\cdot ab+b\cdot bc+c\cdot ca\ge a\cdot bc+b\cdot ac+c\cdot ab=3abc.$$

5.思路分析：左边三项直接用基本不等式显然不行，考察到不等式的对称性，可用轮换的方法.

$a^2+b^2\ge 2ab$,同理$b^2+c^3\ge 2bc,c^2+a^2\ge 2ca$；三式相加再除以 2 即得证.

评述：（1）利用基本不等式时，除了本题的轮换外，一般还须掌握添项、连用等技巧.

如$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}\ge x_1+x_2+\cdots+x_n$，可在不等式两边同时加上$x_2+x_3+\cdots+x_n+x_1$.

再如证$(a+1)(b+1)(a+c)^3(b+c)^3\ge 256a^2b^2c^3\,(a,b,c>0)$时，可连续使用基本不等式.

（2）基本不等式有各种变式　如$(\frac{a+b}{2})^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$等.但其本质特征不等式两边的次数及系数是相等的.如上式左右两边次数均为 2，系数和为 1.

6.　思路分析：不等式左边是a、b的 4 次式，右边为常数$\frac{1}{8}$，如何也转化为a、b的 4 次式呢.

要证$a^4+b^4\ge\frac{1}{8}$,即证$a^4+b^4\ge\frac{1}{8}(a+b)^4$.

评述：（1）本题方法具有一定的普遍性.如已知$x_1+x_2+x_3=1,x_i\ge 0$,求证：$x_1^3+x_2^3+x_3^3\ge\frac{1}{3}$.右侧的$\frac{1}{3}$可理解为$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^3$.再如已知$x_1+x_2+x_3=0$，求证：$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\le 0$，此处可以把 0 理解为$\frac{3}{8}(x_1+x_2+x_3)^2$，当然本题另有简使证法.

（2）基本不等式实际上是均值不等式的特例.（一般地，对于n个正数$a_1,a_2,\cdots a_n$)

调和平均 $H_n=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$

几何平均 $G_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$

算术平均 $A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

平方平均 $Q_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{2}}$

这四个平均值有以下关系：$H_n\le G_n\le A_n\le Q_n$，其中等号当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立.

7.　证明: 令$b_i=\frac{a_i}{G_n},(i=1,2,\cdots,n)$则$b_1b_2\cdots b_n=1$，故可取$x_1,x_2,\cdots x_n>0$，使得

$b_1=\frac{x_1}{x_2},b_2=\frac{x_2}{x_3},\cdots,b_{n-1}=\frac{x_{n-1}}{x_n},b_n=\frac{x_n}{x_1}$ 由排序不等式有：

$$b_1+b_2+\cdots+b_n$$

$$=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}\text{（乱序和）}$$

$$\geq x_1\cdot\frac{1}{x_1}+x_2\cdot\frac{1}{x_2}+\cdots+x_n\cdot\frac{1}{x_n}\text{（逆序和）}$$

$=n$,

$$\therefore \frac{a_1}{G_n}+\frac{a_2}{G_n}+\cdots+\frac{a_n}{G_n}\geq n,\text{即}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq G_n.$$

评述:对 $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}$ 各数利用算术平均大于等于几何平均即可得，$G_n\leq A_n$.

8. 分析:原不等式等价于 $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n}<1+\frac{1}{n+1}$，故可设法使其左边转化为 n 个数的几何平均，而右边为其算术平均.

$$\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n}=\sqrt[n+1]{\underbrace{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}_{n\text{个}}\cdot 1}<\frac{\overbrace{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})+1}}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}.$$

评述:（1）利用均值不等式证明不等式的关键是通过分拆和转化，使其两边与均值不等式形式相近.类似可证 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}<(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$.

（2）本题亦可通过逐项展开并比较对应项的大小而获证，但较繁.

9.证明:先证左边不等式

$$n[(1+n)^{\frac{1}{n}}-1]<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\Leftrightarrow(1+n)^{\frac{1}{n}}-1<\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$$

$$\Leftrightarrow (1+n)^{\frac{1}{n}}<\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+n}{n}$$

$$\Leftrightarrow (1+n)^{\frac{1}{n}}<\frac{(1+1)+(\frac{1}{2}+1)+(\frac{1}{3}+1)+\cdots+(\frac{1}{n}+1)}{n}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{1+n}<\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}}{n}\qquad(*)$$

$$\frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}}{n}>\sqrt[n]{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}}=\sqrt[n]{n+1}.$$

∴ （*）式成立，故原左边不等式成立.

其次证右边不等式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<n-(n-1)\cdot n^{-\frac{1}{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow n^{-\frac{1}{n-1}}<\frac{n-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})}{n-1}\Leftrightarrow \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}<\frac{(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{3})+\cdots+(1-\frac{1}{n})}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}<\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}}{n-1} \quad (**)$$

（**）式恰符合均值不等式，故原不等式右边不等号成立.

§16 排列，组合

1．排列组合题的求解策略

（1）排除：对有限条件的问题，先从总体考虑，再把不符合条件的所有情况排除，这是解决排列组合题的常用策略．

（2）分类与分步

有些问题的处理可分成若干类，用加法原理，要注意每两类的交集为空集，所有各类的并集是全集；有些问题的处理分成几个步骤，把各个步骤的方法数相乘，即得总的方法数，这是乘法原理．

（3）对称思想：两类情形出现的机会均等，可用总数取半得每种情形的方法数．

（4）插空：某些元素不能相邻或某些元素在特殊位置时可采用插空法．即先安排好没有限制条件的元素，然后将有限制条件的元素按要求插入到排好的元素之间．

（5）捆绑：把相邻的若干特殊元素“捆绑”为一个“大元素”，然后与其它“普通元素”全排列，然后再“松绑”，将这些特殊元素在这些位置上全排列．

（6）隔板模型：对于将不可辨的球装入可辨的盒子中，求装的方法数，常用隔板模型．如将12个完全相同的球排成一列，在它们之间形成的11个缝隙中任意插入3块隔板，把球分成4堆，分别装入4个不同的盒子中的方法数应为C_{11}^{3}，这也就是方程$a+b+c+d=12$的正整数解的个数．

2．圆排列

（1）由$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$的$n$个元素中，每次取出$r$个元素排在一个圆环上，叫做一个圆排列（或叫环状排列）．

（2）圆排列有三个特点：（i）无头无尾；（ii）按照同一方向转换后仍是同一排列；（iii）两个圆排列只有在元素不同或者元素虽然相同，但元素之间的顺序不同，才是不同的圆排列．

（3）定理：在$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$的$n$个元素中，每次取出$r$个不同的元素进行圆排列，圆排列数为$\dfrac{P_n^r}{r}$．

3．可重排列

允许元素重复出现的排列，叫做有重复的排列．

在m个不同的元素中，每次取出n个元素，元素可以重复出现，按照一定的顺序那么第一、第二、…、第n位是的选取元素的方法都是m种，所以从m个不同的元素中，每次取出n个元素

的可重复的排列数为m^n.

4．不尽相异元素的全排列

如果n个元素中，有p_1个元素相同，又有p_2个元素相同，…，又有p_s个元素相同（$p_1+p_2+\cdots+p_s\le n$），这n个元素全部取的排列叫做不尽相异的n个元素的全排列，它的排列数是$\dfrac{n!}{p_1!\cdot p_2!\cdot\cdots p_s!}$

5．可重组合

（1）从n个元素，每次取出p个元素，允许所取的元素重复出现$1,2,\cdots,p$次的组合叫从n个元素取出p个有重复的组合.

（2）定理：从n个元素每次取出p个元素有重复的组合数为：$H_n^p=C_{n+(p-1)}^r$.

例题讲解

1．数1447,1005,1231有某些共同点，即每个数都是首位为1的四位数，且每个四位数中恰有两个数字相同，这样的四位数共有多少个？

2．有多少个能被3整除而又含有数字6的五位数？

3．有$2n$个人参加收发电报培训，每两人结为一对互发互收，有多少种不同的结对方式？

4．将$n+1$个不同的小球放入n个不同的盒子中，要使每个盒子都不空，共有多少种放法？

5．在正方体的8个顶点，12条棱的中点，6个面的中心及正方体的中心共27个点中，共线的三

点组的个数是多少个？

6．用 8 个数字 1,1，7,7，8,8，9,9 可以组成不同的四位数有多少个？

7．用 A,B,C,D,E 五种颜色给正方体的各个面涂色，并使相邻面必须涂不同的颜色，共有多少种不同的涂色方式？

8．某种产品有 4 只次品和 6 只正品（每只产品可区分），每次取一只测试，直到 4 只次品全部测出为止．求最后一只次品在第五次测试时被发现的不同情形有多少种？

9．在平面上给出 5 个点，连结这些点的直线互不平行，互不重合，也互不垂直，过每点向其余四点的连线作垂线，求这此垂线的交点最多能有多少个？

10．位政治家举行圆桌会议，两位互为政敌的政治家不愿相邻，其入坐方法有多少种？

11．某城市有 6 条南北走向的街道，5 条东西走向的街道．如果有人从城南北角（图 A 点）走到东南角中 B 点最短的走法有多少种？

12．用 4 个 1 号球，3 个 2 号球，2 个 3 号球摇出一个 9 位的奖号，共有多少种可能的号码？

13．将 r 个相同的小球，放入 n 个不同的盒子（ $r \geq n$ ）．

（1）有多少种不同的放法？

（2）如果不允许空盒应有多少种不同的放法？

14．8 个女孩和 25 个男孩围成一圈，任意两个女孩之间至少站着两个男孩．（只要把圆旋转一下就重合的排列认为是相同的）

课后练习

1．8 次射击，命中 3 次，其中恰有 2 次连续命中的情形共有（　　）种

（A）15　　（B）30　　（C）48　　（D）60

2．在某次乒乓球单打比赛中，原计划每两名选手恰比赛一场，但有 3 名选手各比赛了 2 场之后就退出了，这样，全部比赛只进行了 50 场。那么，在上述 3 名选手之间比赛的场数是（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

3．某人从楼下到楼上要走 11 级楼梯，每步可走 1 级或 2 级，不同的走法有（　）种

（A）144　　（B）121　　（C）64　　（D）81

4．从 7 名男乒乓球队员，5 名女乒乓球队员中选出 4 名进行男女混合双打，不同的分组方法有（　　）种

（A）$2C_7^2C_5^2$　　（B）$4C_7^2C_5^2$　　（C）$P_7^2P_5^2$　　（D）$C_7^2C_5^2$

5．有 5 分、1 角、5 角的人民币各 2 枚、3 张、9 张，可组成的不同币值（非 0）有（　　　　）种

（A）79　　（B）80　　（C）88　　（D）89

6．从 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这 10 个数中取出 3 个数，使其和为不小于 10 的偶数，不同的取法有________种

7．已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 a,b,c 是取自集合 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾斜角为锐角，那么，这样的直线的条数是______．

8．设 $ABCDEF$ 为正六边形，一只青蛙开始在顶点 A 处，它每次可随意地跳到相邻两顶点之一．若在 5 次之内跳到 D 点，则停止跳动；若 5 次之内不能到达 D 点，则跳完 5 次也停止跳动，那么这只青蛙从开始到停止，可能出现的不同跳法共______种．

9．如果：（1）a,b,c,d 都属于 $\{1,2,3,4\}$；（2）$a\neq b,b\neq c,c\neq d,d\neq a$；(3)$a$ 是 a,b,c,d 中的最小值，那么，可以组成的不同的四位数 $\overline{abcd}$ 的个数是_________．

10．在一个正六边形的六个区域种植观赏植物，要求同一块中种同一种植物，相邻的两块种不同的植物。现有 4 种不同的植物可供选择，则有__________种载种方案．

11．10 人围圆桌而，如果甲、乙二人中间相隔 4 人，有__________种坐法．

12．从 $1,2,3,\cdots,19$ 中，按从小到大的顺序选取 a_1,a_2,a_3,a_4 四个数，使得 $a_2-a_1\geq 2$，$a_3-a_2\geq 3$，$a_4-a_3\geq 4$．问符合上要求的不同取法有多少种？

13．8 人围张一张圆桌，其中 A、B 两人不得相邻，而 B、C 两人以必须相邻的不同围坐方式有多少种？

14．4 对夫妇去看电影，8 人坐成一排．若每位女性的邻座只能丈夫或另外的女性，共有多少种坐法？

§17 二项式定理与多项式

1．二项工定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k\,(n\in\mathbf{N}^*)$$

2．二项展开式的通项

$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r\,(0\le r\le n)$ 它是展开式的第 r+1 项.

3．二项式系数

$C_n^r(0\le r\le n)$.

4．二项式系数的性质

（1）$C_n^k=C_n^{n-k}\,(0\le k\le n)$.

（2）$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}(0\le k\le n-1)$.

（3）若 n 是偶数，有 $C_n^0<C_n^1<\cdots<C_n^{\frac{n}{2}}>\cdots>C_n^{n-1}>C_n^n$，即中间一项的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大.

若 n 是奇数，有 $C_n^0<C_n^1<\cdots<C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}>\cdots>C_n^{n-1}>C_n^n$，即中项二项的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$和$C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等且最大.

（4）$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

（5）$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.

（6）$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$或$C_n^k=\dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$.

（7）$C_n^k\cdot C_k^m=C_n^m\cdot C_{n-m}^{k-m}=C_n^{k-m}C_{n-k+m}^m\,(m\le k\le n)$.

（8）$C_n^n+C_{n+1}^n++C_{n+2}^n+\cdots+C_{n+k}^n=C_{n+k+1}^{n+1}$.

以上组合恒等式（是指组合数 C_n^m 满足的恒等式）是证明一些较复杂的组合恒等式的基本工具.（7）和（8）的证明将在后面给出.

5．证明组合恒等式的方法常用的有

（1）公式法，利用上述基本组合恒等式进行证明.

（2）利用二项式定理，通过赋值法或构造法用二项式定理于解题中.

（3）利用数学归纳法.

（4）构造组合问题模型，将证明方法划归为组合应用问题的解决方法.

例题讲解

1．求 $(x+1+\frac{1}{x})^7$ 的展开式中的常数项.

2．求 $(1+2x-3x^2)^6$ 的展开式里 x^5 的系数.

3．已知数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots(a_0\neq 0)$ 满足 $a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i(i=1,2,3,\cdots)$,求证：对于任何自然数 n，$p(x)=a_0C_n^0(1-x)^n+a_1C_n^1x(1-x)^{n-1}+a_2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+a_nC_n^nx^n$ 是 x 的一次多项式或零次多项式.

4．已知 a，b 均为正整数，且 $a>b,\sin\theta=\frac{2ab}{a^2+b^2}$(其中$0<\theta<\frac{\pi}{2}$), $A_n=(a^2+b^2)^n\cdot\sin n\theta$,求证：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，A_n 均为整数.

5．已知x,y为整数，P 为素数，求证：$(x+y)^P \equiv x^P + y^P \pmod P$

6．若$(\sqrt{5}+2)^{2r+1} = m+\alpha\,(r,m\in \mathbf{N}^*, 0<\alpha<1)$，求证：$\alpha(m+\alpha)=1.$

7．数列$\{a_n\}$中，$a_1=3, a_n=3^{a}_{n-1}(n\geq 2)$，求$a_{2001}$的末位数字是多少？

8．求 N=19^{88}－1 的所有形如$d=2^a\cdot 3^b,(a,b$为自然数）的因子 d 之和.

9．设$x=(15+\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}$，求数$x$的个位数字.

10. 已知$a_0=0,a_1=1,a_{n+1}=8a_n-a_{n-1}(n=1,2,\cdots)$试问：在数列$\{a_n\}$中是否有无穷多个能被15整除的项？证明你的结论.

课后练习

1．已知实数α,β均不为0，多项$f(x)=\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta$的三根为$x_1,x_2,x_3$，求$(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})$的值.

2．设$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，其中a,b,c,d为常数，如果$f(1)=1,f(2)=2,f(3)=3,$求$\frac{1}{4}[f(4)+f(0)]$的值.

3．定义在实数集上的函数$f(x)$满足：$f(x)+xf(1-x)=1+x,求f(x).$

4．证明：当n=6m时，$C_n^1-C_n^3\cdot 3+C_n^5\cdot 3+C_n^5\cdot 3^2-\cdots=0.$

5．设$(1+x+x^2)^n$展开式为$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$，求证：$a_0+a_3+a_6+\cdots=3^{n-1}.$

6．求最小的正整数 n，使得$(xy-3x+7y-21)^n$的展开式经同类项合并后至少有 1996 项.

7．设$f(x)=(x^3+x-1)^9(2x+1)^4$，试求：

（1）$f(x)$的展开式中所有项的系数和.

（2）$f(x)$的展开式中奇次项的系数和.

8．证明：对任意的正整数 n，不等式$(2n+1)^n \geq (2n)^n+(2n-1)^n$成立.

例题答案：

1.解：由二项式定理得

$$(x+1+\frac{1}{x})^7=[1+(x+\frac{1}{x})]^7$$

$$=C_7^0+C_7^1(x+\frac{1}{x})+C_7^2(x+\frac{1}{x})^2+\cdots+C_7^r(x+\frac{1}{x})^r+\cdots+C_7^7(x+\frac{1}{x})^7 \quad ①$$

其中第$r+1(0\leq r\leq 7)$项为$T_{r+1}=C_7^r(x+\frac{1}{x})^r$ ②

在$(x+\frac{1}{x})^r$的展开式中，设第 k+1 项为常数项，记为$T_{k+1,}$

则$T_{k+1,}=C_r^k x^{r-k}(\frac{1}{x})^k=C_r^k x^{r-2k},(0\leq k\leq r)$ ③

由③得 r－2k=0，即 r=2k，r 为偶数，再根据①、②知所求常数项为

$$C_7^0+C_7^2C_7^1+C_7^4C_7^2+C_7^6C_6^3=393.$$

评述：求某一项时用二项展开式的通项.

2. 解：因为$(1+2x-3x^2)^6=(1+3x)^6(1-x)^6$

$$=[1+C_6^1\cdot 3x+C_6^2\cdot(3x)^2+C_6^3\cdot(3x)^3+\cdots+C_6^6\cdot(3x)^6][1-C_6^1x+C_6^2x^2-C_6^3x^3+C_6^4x^4-C_6^5x^5+C_6^6x^6].$$

所以$(1+2x-3x^2)^6$的展开式里 x^5 的系数为$1(-C_6^5)+3C_6^1\cdot C_6^4+3^2C_6^2(-C_6^3)+3^3C_6^3\cdot C_6^2$

$$+3^4C_6^4\cdot(-C_6^1)+3^5C_6^5\cdot 1=-168.$$

评述：本题也可将$(1-2x-3x^2)^6$化为$[1+(2x-3x^2)]^6$用例 1 的作法可求得.

3. 分析：由$a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i$知$\{a_n\}$是等差数列，则$a_i=a_{i-1}+d=a_0+id(i=1,2,\cdots)$, 从而可将$p(x)$表示成$a_0$和$d$的表达式，再化简即可.

解：因为$a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i(i=1,2,3,\cdots)$　所以数列$\{a_n\}$为等差数列，设其公差为 d

有$a_i=a_0+id(i=1,2,3,\cdots)$　从而

$$P(x)=a_0C_n^0(1-x)^n+(a_0+d)C_n^1x(1-x)^{n-1}+(a_0+2d)C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+(a_0+nd)C_n^nx^n$$

$=a_0[C_n^0(1-x)^n+C_n^1x(1-x)^{n-1}+\cdots+C_n^nx^n]+d[1\cdot C_n^1x(1-x)^{n-1}+2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+nC_n^nx^n]$, 由二项定理，知

$$C_n^0(1-x)^n+C_n^1x(1-x)^{n-1}+C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+C_n^nx^n=[(1-x)+x]^n=1,$$

又因为$kC_n^k=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}=nC_{n-1}^{k-1}$,

从而$C_n^1x(1-x)^{n-1}+2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+nC_n^nx^n$

$=nx[(1-x)^{n-1}+C_{n-1}^1x(1-x)^{n-2}+\cdots+x^{n-1}]$

$=nx[(1-x)+x]^{n-1}=nx.$　所以$P(x)=a_0+ndx.$

当$d\neq0$时, $P(x)$为x的一次多项式，当$d=0$时, $P(x)$为零次多项式.

4. 分析：由$\sin n\theta$联想到复数棣莫佛定理，复数需要$\cos\theta$，然后分析 A_n 与复数的关系.

证明：因为$\sin\theta=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$, 且$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $a>b$, 所以$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

显然$\sin n\theta$为$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$的虚部，由于$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$$=(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i)^n=\frac{1}{(a^2+b^2)^n}(a^2-b^2+2abi)=\frac{1}{(a^2+b^2)^n}(a+bi)^{2n}.$$

所以$(a^2+b^2)^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=(a+bi)^{2n}$.从而$A_n=(a^2+b^2)^n\sin n\theta$为$(a+bi)^{2n}$的虚部.

因为 a、b 为整数，根据二项式定理，$(a+bi)^{2n}$的虚部当然也为整数，所以对一切$n\in\mathbf{N}^*$，A_n为整数.

评述：把 A_n 为与复数$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$联系在一起是本题的关键.

5. 证明：$(x+y)^P=x^P+C_P^1x^{P-1}y+C_P^2x^{P-2}y^2+\cdots+C_P^{p-1}xy^{P-1}+y^P$

由于 $C_P^r=\dfrac{p(p-1)\cdots(p-r+1)}{r!}(r=1,2,\cdots,P-1)$ 为整数，可从分子中约去 r！，又因为 P 为素数，

且 $r<p$，所以分子中的 P 不会红去，因此有 $P|\,C_P^r(r=1,2,\cdots,P-1)$. 所以

$(x+y)^P\equiv x^P+y^P(\bmod P)$.

评述：将 $(x+y)^P$ 展开就与 x^P+y^P 有联系，只要证明其余的数能被 P 整除是本题的关键.

6. 分析：由已知 $m+\alpha=(\sqrt{5}+2)^{2r+1}$ 和 $(m+\alpha)\alpha=1$ 猜想 $\alpha=(\sqrt{5}-2)^{2r+1}$，因此需要求出 α，

即只需要证明 $(\sqrt{5}+2)^{2r+1}-(\sqrt{5}-2)^{2r+1}$ 为正整数即可.

证明：首先证明，对固定为 r，满足条件的 m,α 是惟一的.否则，设 $(\sqrt{5}+2)^{2r+1}=m_1+\alpha_1$

$=m_2+\alpha_2[m_1,m_2\in\mathbf{N}^*,\alpha_1,\alpha_2\in(0,1),m_1\neq m_2,\alpha_1\neq\alpha_2]$

则 $m_1-m_2=\alpha_1-\alpha_2\neq 0$, 而 $m_1-m_2\in\mathbf{Z},\alpha_1-\alpha_2\in(-1,0)\cup(0,1)$ 矛盾.所以满足条件的 m 和 α 是惟一的. 下面求 m 及 α.

因为 $(\sqrt{5}+2)^{2r+1}-(\sqrt{5}-2)^{2r+1}=C_{2r+1}^0(\sqrt{5})^{2r+1}+C_{2r+1}^1(\sqrt{5})^{2r}\cdot 2+C_{2r+1}^2(\sqrt{5})^{2r-1}\cdot 2^2+\cdots+2^{2r+1}$

$-[C_{2r+1}^0(\sqrt{5})^{2r+1}-C_{2r+1}^1(\sqrt{5})^{2r}\cdot 2+C_{2r+1}^2(\sqrt{5})^{2r-1}\cdot 2^2+\cdots-2^{2r+1}]$

$=2[C_{2r+1}^1(\sqrt{5})^{2r}\cdot 2+C_{2r+1}^3(\sqrt{5})^{2r-2}\cdot 2^3+\cdots+2^{2r+1}]$

$=2[C_{2r+1}^1 5^r\cdot 2+C_{2r+1}^3\cdot 5^{r-1}\cdot 2^3+\cdots+C_{2r+1}^{2r-1}5^{2r-1}+2^{2r+1}]\in\mathbf{N}^*$

又因为 $\sqrt{5}-2\in(0,1)$, 从而 $(\sqrt{5}-2)^{2r+1}\in(0,1)$

所以 $m=2(C_{2r+1}^1\cdot 5^r\cdot 2+C_{2r+1}^3\cdot 5^{r-1}\cdot 2^3+\cdots+C_{2r+1}^{2r-1}\cdot 5^r\cdot 2^{2r-1}+2^{2r+1})$
$\alpha=(\sqrt{5}-2)^{2r+1}$

故 $\alpha(m+\alpha)=(\sqrt{5}-2)^{2r+1}.\quad(\sqrt{5}+2)^{2r+1}=(5-4)^{2r+1}=1$.

评述：猜想 $\alpha=(\sqrt{5}-2)^{2r+1},(\sqrt{5}+2)^{2r+1}$ 与 $(\sqrt{5}-2)^{2r+1}$ 进行运算是关键.

7. 分析：利用 n 取 1，2，3，…猜想 a_n 及 a_n 的末位数字.

解：当 n=1 时，a_1=3，$a_2=3^{a_1}=3^3=27=4\times 6+3$

$a_3=3^{a_2}=3^{27}=3^{4\times6+3}=(3^4)^6\cdot3^3=(81)^6\cdot3^3=(81)^6\times27$，因此 a_2,a_3 的末位数字都是 7,

猜想，$a_n=4m+3,m\in\mathbf{N}^*$. 现假设 n=k 时，$a_k=4m+3,m\in\mathbf{N}^*$.

当 n=k+1 时，$a_{k+1}=3^{a_k}=3^{4m+3}=(4-1)^{4m+3}$

$=C_{4m+3}^{0}4^{4m+3}\cdot(-1)^0+C_{4m+3}^{1}\cdot4^{4m+2}\cdot(-1)^1+\cdots+C_{4m+3}^{4m+2}\cdot4^1\cdot(-1)^{4m+2}+C_{4m+3}^{4m+3}\cdot4^0\cdot(-1)^{4m+3}$

$=4T-1=4(T-1)+3$, 从而 $a_n=4m+3(m\in\mathbf{N}^*)$

于是 $a_{n+1}=3^{a_n}=3^{4m+3}=(81)^m\times27$. 故 a_{2001} 的末位数字是 7.

评述：猜想 $a_n=4m+3$ 是关键.

8. 分析：寻求 N 中含 2 和 3 的最高幂次数，为此将 19 变为 20－1 和 18+1，然后用二项式定理展开.

解：因为 $N=19^{88}-1=(20-1)^{88}-1=(1-4\times5)^{88}-1$

$=-C_{88}^{1}\times4\times5+C_{88}^{2}\times4^2\times5^2-C_{88}^{3}\times4^3\times5^3+\cdots-C_{88}^{87}\times4^{87}\times5^{87}+C_{88}^{88}\times4^{88}\times5^{88}$

$=-2^5\times55+2^6\times M=2^5(2M-55)$ 其中 M 是整数.

上式表明，N 的素因数中 2 的最高次幂是 5. 又因为 $N=(1+2\times9)^{88}-1$

$=C_{88}^{1}\times2\times9+C_{88}^{2}\times2^2\times9^2+\cdots+C_{88}^{88}\times2^{88}\times9^{88}$

$=3^2\times2\times88+3^4\cdot P=3^2\times(2\times88+9P)$ 其中 P 为整数.

上式表明，N 的素因数中 3 的最高次幂是 2.

综上所述，可知 $N=2^5\cdot3^2\cdot Q$，其中 Q 是正整数，不含因数 2 和 3.

因此，N 中所有形如 $2^a\cdot3^b$ 的因数的和为 $(2+2^2+2^3+2^4+2^5)(3+3^2)=744$.

9. 分析：直接求 x 的个位数字很困难，需将与 x 相关数联系，转化成研究其相关数.

解：令 $y=(15-\sqrt{220})^{19}+(15-\sqrt{220})^{82}$, 则 $x+y=[(15+\sqrt{220})^{19}+(15+\sqrt{220})^{82}]$

$+[(15-\sqrt{220})^{19}+(15-\sqrt{220})^{82}]$，由二项式定理知，对任意正整数 n.

$(15+\sqrt{220})^n+(15-\sqrt{220})^n=2(15^n+C_n^2\cdot15^{n-2}\cdot220+\cdots)$ 为整数，且个位数字为零.

因此，x+y 是个位数字为零的整数.再对 y 估值，

因为 $0<15-\sqrt{220}=\dfrac{5}{15+\sqrt{220}}<\dfrac{5}{25}=0.2$， 且 $(15-\sqrt{220})^{88}<(15-\sqrt{220})^{19}$，

所以 $0<y<2(15-\sqrt{220})^{19}<2\times0.2^{19}<0.4$. 故 x 的个位数字为 9.

评述：转化的思想很重要，当研究的问题遇到困难时，将其转化为可研究的问题.

10. 分析：先求出a_n，再将a_n表示成与15有关的表达式，便知是否有无穷多项能被15整除.

证明：在数列$\{a_n\}$中有无穷多个能被15整除的项，下面证明之.

数列$\{a_n\}$的特征方程为$x^2-8x+1=0$,它的两个根为$x_1=4+\sqrt{15}, x_2=4-\sqrt{15}$，

所以$a_n=A(4+\sqrt{15})^n+B(4-\sqrt{15})^n$ （n=0，1，2，…）

由$a_0=0, a_1=1$得$A=\frac{1}{2\sqrt{15}}, B=-\frac{1}{2\sqrt{15}}$， 则$a_n=\frac{1}{2\sqrt{15}}[(4+\sqrt{15})^n-(4-\sqrt{15})^n]$,

取$n=2k(k=0,1,2,\cdots)$，由二项式定理得

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{2\sqrt{15}}[2C_n^1\cdot 4^{n-1}\cdot\sqrt{15}+2C_n^3\cdot 4^{n-3}\cdot(\sqrt{15})^3+\cdots+2C_n^{n-1}\cdot 4\cdot(\sqrt{15})^{n-1}]\\&=C_n^1\cdot 4^{n-1}+C_n^3\cdot 4^{n-3}\cdot 15+\cdots+C_n^n\cdot 4\cdot 15^{\frac{n-2}{2}}\\&=C_{2k}^1\cdot 4^{2k-1}+C_{2k}^3\cdot 4^{2k-3}\cdot 15+\cdots+C_{2k}^{2k}\cdot 4\cdot 15^{k-1}\\&=C_{2k}^1\cdot 4^{2k-1}+15(C_{2k}^3\cdot 4^{2k-3}+\cdots+C_{2k}^{2k-1}\cdot 4\cdot 15^{k-2})\\&=2k\cdot 4^{2k-1}+15T \qquad (\text{其中}T\text{为整数}),\end{aligned}$$

由上式知当15|k，即30|n时，15|a_n，因此数列$\{a_n\}$中有无穷多个能被15整除的项.

评述：在二项式定理中，$(a+b)^n$与$(a-b)^n$经常在一起结合使用.

§18 直线和圆，圆锥曲线

一．直线与圆

1,两点间的距离公式:设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$,则$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$；

2,线段的定比分点坐标公式:设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$,点 $P(x,y)$ 分 P_1P_2 的比为 λ,则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ (\lambda\neq-1)$$

3,直线方程的各种形式

(1),点斜式: $y-y_0=k(x-x_0)$； (2),斜截式: $y=kx+b$； (3),两点式: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

(4),截距式: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1(a,b\neq0)$;(5),一般式: $Ax+By+C=0(A,B$不同为零);

(6)参数方程: $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ (t为参数,α 为倾斜角,$|t|$表示点(x,y)与(x_0,y_0)之间的距离)

4,两直线的位置关系

设 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0,l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$(或 $l_1:y=k_1x+b_1,l_2:y=k_2x+b_2$).则

(1),$l_1 // l_2 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ 且 $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$(或 $k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$);

(2),$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ (或 $k_1 \cdot k_2 = -1$).

5,两直线的到角公式与夹角公式:

(1),到角公式:l_1 到 l_2 的到角为 θ,则 $\tan\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$,($0^0 \le \theta \le 180^0$);

(2),夹角公式:l_1 与 l_2 的夹角为 θ,则 $\tan\theta = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$,($0^0 \le \theta \le 90^0$).

6,点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离:$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

7,圆的方程

(1),标准方程:$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$,其中 (a, b) 为圆心坐标,R 为圆半径;

(2),一般方程:$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,其中 $D^2 + E^2 - 4F > 0$,圆心为 $(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2})$,半径为 $\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

(3),参数方程: $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$,其中圆心为 (a, b),半径为 R.

二.圆锥曲线

	椭圆	双曲线	抛物线
定义	与两个定点的距离的和等于常数	与两个定点的距离的差的绝对值等于常数	与一个定点和一条定直线的距离相等
标准方程	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (或 $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$),	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (或 $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$)	$y^2 = 2px$ (或 $x^2 = 2py$)
参数方程	$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ (或 $\begin{cases} x = b\sin\theta \\ y = a\cos\theta \end{cases}$)	$\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \end{cases}$ (或 $\begin{cases} x = b\tan\theta \\ y = a\sec\theta \end{cases}$)	$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ (或 $\begin{cases} x = 2pt \\ y = 2pt^2 \end{cases}$)
焦点	$(\pm c, 0)$ 或 $(0, \pm c)$	$(\pm c, 0)$ 或 $(0, \pm c)$	$(\dfrac{p}{2}, 0)$ 或 $(0, \dfrac{p}{2})$

正数 a,b,c,p 的关系	$c^2=a^2-b^2$ ($a>b>0$)	$c^2=a^2+b^2$ ($a>0,b>0$)	
离心率	$e=\frac{c}{a}<1$	$e=\frac{c}{a}>1$	$e=1$
准线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$(或 $y=\pm\frac{a^2}{c}$)	$x=\pm\frac{a^2}{c}$(或 $y=\pm\frac{a^2}{c}$)	$x=-\frac{p}{2}$(或 $y=-\frac{p}{2}$)
渐近线		$y=\pm\frac{b}{a}x$(或 $x=\pm\frac{b}{a}y$)	
焦半径	$\lvert PF_1\rvert=a+ex_0$ $\lvert PF_2\rvert=a-ex_0$ (或$\lvert PF_1\rvert=a+ey_0$ $\lvert PF_2\rvert=a-ey_0$)	$\lvert PF_1\rvert=-ex_0-a$ $\lvert PF_2\rvert=-ex_0+a$ ($\lvert PF_1\rvert=-ey_0-a$, $\lvert PF_2\rvert=-ey_0+a$), (点 P 在左或下支)	$\lvert PF\rvert=x_0+\frac{p}{2}$ (或$\lvert PF\rvert=y_0+\frac{p}{2}$)
统一定义	到定点的距离与到定直线的距离之比等于定值	的点的集合	,(注:焦点要与对应准线配对使用)

三．解题思想与方法导引.

1,函数与方程思想　2,数形结合思想.　3,分类讨论思想.　4,参数法.　5,整体处理

例题讲解

1．在平面直角坐标系中,方程$\frac{|x+y|}{2a}+\frac{|x-y|}{2b}=1$($a,b$为相异正数),所表示的曲线是（　　）

A,三角形　　B,正方形　　C,非正方形的长方形　　D,非正方形的菱形

2．平面上整点(坐标为整数的点)到直线 $y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}$ 的距离中的最小值是（　　）

A,$\frac{\sqrt{34}}{170}$　　B,$\frac{\sqrt{34}}{85}$　　C,$\frac{1}{20}$　　D,$\frac{1}{30}$

3．过抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点 F 作倾斜角为 60^0 的直线,若此直线与抛物线交于 A,B 两点,弦 AB 的中垂线与 x 轴交于 P 点,则线段 PF 的长等于（　　）

A,$\frac{16}{3}$　　B,$\frac{8}{3}$　　C,$\frac{16}{3}\sqrt{3}$　　D,$8\sqrt{3}$

4．若椭圆 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 上一点 P 到左焦点的距离等于它到右焦点距离的 2 倍,则 P 点坐标为（　　）

A, $(3,\sqrt{15})$　　B, $(-3,\sqrt{15})$　　C, $(3,\pm\sqrt{15})$　　D, $(-3,\pm\sqrt{15})$

5．过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 中心的弦 AB, $F(c,0)$ 是右焦点,则 ΔAFB 的最大面积为（　　）

A, bc　　B, ab　　C, ac　　D, b^2

6．已知 P 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的任意一点, F_1,F_2 为焦点,若 $\angle F_1PF_2=\theta$,则 $S_{\Delta F_1PF_2}=$（　　）

A, $b^2\cot\frac{\theta}{2}$　　B, $\frac{1}{2}ab\sin\theta$　　C, $\left|b^2-a^2\right|\tan\frac{\theta}{2}$　　D, $(a^2+b^2)\sin\theta$

7．给定点 $P(2,-3),Q(3,2)$,已知直线 $ax+y+2=0$ 与线段 PQ(包括 P,Q 在内)有公共点,则 a 的取值范围是________________________.

8．过定点 $F(a,0)\ (a>0)$ 作直线 l 交 y 轴于 Q 点,过 Q 点作 $QT\perp FQ$ 交 x 轴于 T 点,延长 TQ 至 P 点,使 $|QP|=|TQ|$,则 P 点的轨迹方程是______________________.

9．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与直线 $x+y=1$ 交于 M,N 两点,且 $OM\perp ON$,(O 为原点),当椭圆的离心率 $e\in[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 时,椭圆长轴长的取值范围是________________.

10．已知 F_1,F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的两个焦点,M 是椭圆上一点,M 到 y 轴的距离为 $|MN|$,且 $|MN|$ 是 $|MF_1|$ 和 $|MF_2|$ 的等比中项,则 $|MN|$ 的值等于_____________.

11．已知点 A 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左顶点,点 B 和点 C 在双曲线的右分支上, ΔABC 是等边三角形,则 ΔABC 的面积等于_______________________.

12．若椭圆$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m>n>0)$和双曲线$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1(a>0,b>0)$有相同的焦点$F_1$,$F_2$,P为两条曲线的一个交点,则$|PF_1||PF_2|$的值为________________.

13．设椭圆$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$有一个内接$\Delta PAB$,射线OP与$x$轴正向成$\frac{\pi}{3}$角,直线AP,BP的斜率适合条件$k_{AP}+k_{BP}=0$.

(1),求证:过A,B的直线的斜率k是定值;

(2),求ΔPAB面积的最大值.

14．已知$\angle AOB=\theta$(θ为常数且$0<\theta<\frac{\pi}{2}$),动点P,Q分别在射线OA,OB上使得ΔPOQ的面积恒为36.设ΔPOQ的重心为G,点M在射线OG上,且满足$|OM|=\frac{3}{2}|OG|$.

(1),求$|OG|$的最小值;

(2),求动点M的轨迹方程.

15．过抛物线$y^2=2px$(p为不等于2的素数)的焦点F,作与x轴不垂直的直线l交抛物线于M,N两点,线段MN的垂直平分线交MN于P点,交x轴于Q点.

(1),求PQ中点R的轨迹L的方程;

(2),证明:L上有无穷多个整点,但L上任意整点到原点的距离均不是整数.

课后练习

1．已知点A为双曲线$x^2-y^2=1$的左顶点，点B和点C在双曲线的右支上，ΔABC是等边三角形，则ΔABC的面积是

（A）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　（C）$3\sqrt{3}$　（D）$6\sqrt{3}$

2．平面上整点（纵、横坐标都是整数的点）到直线$y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}$的距离中的最小值是

（A）$\frac{\sqrt{34}}{170}$　（B）$\frac{\sqrt{34}}{85}$　（C）$\frac{1}{20}$　（D）$\frac{1}{30}$

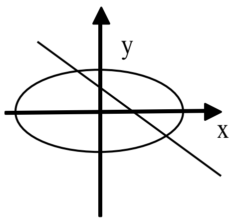
3．若实数x, y满足$(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$，则x^2+y^2的最小值为

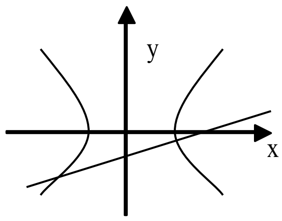
(A) 2　(B) 1　(C) $\sqrt{3}$　(D) $\sqrt{2}$

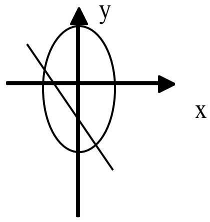
4．直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ 椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 相交于 A，B 两点，该圆上点 P，使得⊿PAB 面积等于 3，这样的点 P 共有

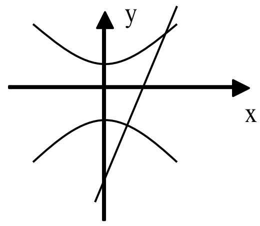
(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

5．设 a，$b\in\mathbf{R}$，$ab\neq0$，那么直线 $ax-y+b=0$ 和曲线 $bx^2+ay^2=ab$ 的图形是









A　　*B*　　*C*　　*D*

6．过抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点 F 作倾斜角为 60° 的直线，若此直线与抛物线交于 A、B 两点，弦 AB 的中垂线与 x 轴交于 P 点，则线段 PF 的长等于

A． $\frac{16}{3}$　　*B*． $\frac{8}{3}$　　*C*． $\frac{16\sqrt{3}}{3}$　　*D*． $8\sqrt{3}$

7．方程 $\frac{x^2}{\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}}+\frac{y^2}{\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}}=1$ 表示的曲线是

A. 焦点在 x 轴上的椭圆　　B. 焦点在 x 轴上的双曲线

C. 焦点在 y 轴上的椭圆　　D. 焦点在 y 轴上的双曲线

8．在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中，记左焦点为 F，右顶点为 A，短轴上方的端点为 B。若该椭圆的离心率是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $\angle ABF=$____________________。

9．设 F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆上的点，且 $|PF_1|:|PF_2|=2:1$，则三角形 ΔPF_1F_2 的面积等于______________.

10．在平面直角坐标系 XOY 中，给定两点 M（－1，2）和 N（1，4），点 P 在 X 轴上移动，当 $\angle MPN$ 取最大值时，点 P 的横坐标为___________________。

11．若正方形 ABCD 的一条边在直线 $y=2x-17$ 上，另外两个顶点在抛物线 $y=x^2$ 上.则该正方形面积的最小值为____________.

12．已知 C_0：$x^2+y^2=1$ 和 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$。试问：当且仅当 a,b 满足什么条件时，对 C_1 任意一点 P，均存在以 P 为顶点、与 C_0 外切、与 C_1 内接的平行四边形？并证明你的结论。

13． 设曲线 C_1: $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$(a 为正常数)与 C_2:$y^2=2(x+m)$在 x 轴上方公有一个公共点 P。

（1）实数 m 的取值范围（用 a 表示）；

（2）O 为原点，若 C_1 与 x 轴的负半轴交于点 A，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，试求⊿OAP 的面积的最大值（用 a 表示）。

14．已知点 $A(0,2)$ 和抛物线 $y^2=x+4$ 上两点 B,C 使得 $AB\perp BC$，求点 C 的纵坐标的取值范围.

15．一张纸上画有半径为 R 的圆 O 和圆内一定点 A，且 $OA=a$. 拆叠纸片，使圆周上某一点 A' 刚好与 A 点重合，这样的每一种拆法，都留下一条直线折痕，当 A' 取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合.

16． （04，14）在平面直角坐标系 xoy 中，给定三点 $A(0,\frac{4}{3}), B(-1,0), C(1,0)$，点 P 到直线 BC 的距离是该点到直线 AB，AC 距离的等比中项。

（Ⅰ）求点 P 的轨迹方程;

（Ⅱ）若直线 L 经过 ΔABC 的内心（设为 D），且与 P 点的轨迹恰好有 3 个公共点，求 L 的斜率 k 的取值范围。

17．过抛物线 $y=x^2$ 上的一点 A（1,1）作抛物线的切线，分别交 x 轴于 D，交 y 轴于 B.点 C 在抛物线上，点 E 在线段 AC 上，满足 $\frac{AE}{EC}=\lambda_1$；点 F 在线段 BC 上，满足 $\frac{BF}{FC}=\lambda_2$，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$，线段 CD 与 EF 交于点 P.当点 C 在抛物线上移动时，求点 P 的轨迹方程.

课后练习答案

1.C　2.B　3.B　4.B　5.B　6.A　7.C　8.90°　9.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10.设椭圆的长轴、短轴的长及焦矩分别为 $2a$、$2b$、$2c$，则由其方程知 a=3，b=2，c=$\sqrt{5}$，故，$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，又已知$[PF_1|:|PF_2|=2:1$，故可得$|PF_1|=4$，$|PF_2|=2$．在△PF_1F_2中，三边之长分别为 2，4，$2\sqrt{5}$，而 $2^2+4^2=(2\sqrt{5})^2$，可见△PF_1F_2是直角三角形，且两直角边的长为 2 和 4，故△PF_1F_2的面积＝4．

11. 解：经过 M、N 两点的圆的圆心在线段 MN 的垂直平分线 y=3－x 上，设圆心为

S（a，3－a），则圆 S 的方程为：$(x-a)^2+(y-3+a)^2=2(1+a^2)$

对于定长的弦在优弧上所对的圆周角会随着圆的半径减小而角度增大，所以，当$\angle MPN$取最大值时，经过 M，N，P 三点的圆 S 必与 X 轴相切于点 P，即圆 S 的方程中的 a 值必须满足

$2(1+a^2)=(a-3)^2$,解得 a=1 或 a=－7。

即对应的切点分别为 $P(1,0)$和$P'(-7,0)$，而过点 M，N，p'的圆的半径大于过点 M，N，P 的圆的半径，所以$\angle MPN>\angle MP'N$，故点 P（1，0）为所求，所以点 P 的横坐标为 1。

12.解：设正方形的边 AB 在直线 $y=2x-17$上，而位于抛物线上的两个顶点坐标为 $C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，则 CD 所在直线 l 的方程 $y=2x+b$, 将直线 l 的方程与抛物线方程联立，得 $x^2=2x+b\Rightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{b+1}.$

令正方形边长为 a, 则 $a^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=5(x_1-x_2)^2=20(b+1)$.①

在 $y=2x-17$上任取一点（6，,5），它到直线 $y=2x+b$的距离为 a, $\therefore a=\dfrac{|17+b|}{\sqrt{5}}$②.

①、②联立解得 $b_1=3, b_2=63.\therefore a^2=80$, 或 $a^2=1280.\therefore a_{\min}^2=80.$

13.利用极坐标解决：以坐标原点为极点，x 轴为极轴建立极坐标系，则椭圆的极坐标方程为

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2} \text{-----（1）}$$

显知此平行四边形 ABCD 必为菱形，设 A(ρ_1,θ)，则 B$(\rho_2,90°+\theta)$

代入（1）式相加：$\dfrac{1}{\rho_1^2}+\dfrac{1}{\rho_2^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

由于该菱形必与单位圆相切，故原点到 AB 的距离为 1，

$\therefore \rho_1\rho_1=1\cdot\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}$，从而 $\dfrac{1}{\rho_1^2}+\dfrac{1}{\rho_2^2}=1$，$\therefore \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$

14. 解：(1)由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\\ y^2=2(x+m)\end{cases}$ 消去 y 得：$x^2+2a^2x+2a^2m-a^2=0$ ①

设 $f(x)=x^2+2a^2x+2a^2m-a^2$，问题(1)化为方程①在 $x\in(-a,\ a)$上有唯一解或等根.

只需讨论以下三种情况：

1° △＝0 得：$m=\dfrac{a^2+1}{2}$，此时 $x_p=-a^2$，当且仅当$-a<-a^2<a$，即 $0<a<1$ 时适合；

2° $f(a)f(-a)<0$，当且仅当$-a<m<a$；

3° $f(-a)=0$ 得 $m=a$，此时 $x_p=a-2a^2$，当且仅当$-a<a-2a^2<a$，即 $0<a<1$ 时适合.

$f(a)=0$ 得 $m=-a$，此时 $x_p=-a-2a^2$，由于$-a-2a^2<-a$，从而 $m\neq-a$.

综上可知，当 0＜a＜1 时，$m=\frac{a^2+1}{2}$或$-a$＜m≤a;

当 a≥1 时，$-a$＜m＜a.

(2)△OAP 的面积 $S=\frac{1}{2}ay_p$

∵0＜a＜$\frac{1}{2}$，故$-a$＜m≤a 时，$0<-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}<a$，

由唯一性得 $x_p=-a^2+a\sqrt{a^2+1-2m}$

显然当 $m=a$ 时，x_p 取值最小．由于 $x_p>0$，从而 $y_p=\sqrt{1-\frac{x_p^2}{a^2}}$ 取值最大，此时 $y_p=2\sqrt{a-a^2}$，∴ $S=a\sqrt{a-a^2}$．

当 $m=\frac{a^2+1}{2}$ 时，$x_p=-a^2$，$y_p=\sqrt{1-a^2}$，此时 $S=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$．

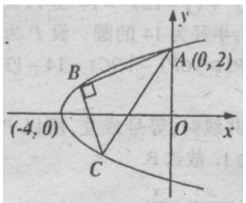
下面比较 $a\sqrt{a-a^2}$ 与 $\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$ 的大小：

令 $a\sqrt{a-a^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，得 $a=\frac{1}{3}$

故当 0＜a≤$\frac{1}{3}$ 时，$a\sqrt{a-a^2}\leqslant\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，此时 $S_{max}=\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$．

当 $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ 时，$a\sqrt{a-a^2}>\frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}$，此时 $S_{max}=a\sqrt{a-a^2}$．

15.解：设 B 点坐标为 (y_1^2-4,y_1)，C 点坐标为 (y^2-4,y)．



显然 $y_1^2-4\neq 0$，故 $k_{AB}=\frac{y_1-2}{y_1^2-4}=\frac{1}{y_1+2}$

由于 $AB\perp BC$，所以 $k_{BC}=-(y_1+2)$

从而 $\begin{cases}y=y_1=-(y_1+2)[x-(y_1^2-4)]\\ y^2=x+4\end{cases}$，消去 x，注意到 $y\neq y_1$ 得：

$(2+y_1)(y+y_1)+1=0\Rightarrow y_1^2+2(2+y)y_1+(2y+1)=0$

由 $\Delta\geq 0$ 解得：$y\leq 0$ 或 $y\geq 4$．

当 $y=0$ 时，点 B 的坐标为 $(-3,-1)$；当 $y=4$ 时，点 B 的坐标为 $(5,-3)$，均满足是题意．故点 C 的纵坐标的取值范围是 $y\leq 0$ 或 $y\geq 4$．

16.解：如图，以 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，则有 $A(a，0)$．设折叠时，⊙O

上点 $A'(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$与点 A 重合，而折痕为直线 MN，则 MN 为线段 AA' 的中垂线．设 $P(x,y)$ 为 MN 上任一点，则 $|PA'|=|PA|$　　5 分

$\therefore (x-R\cos\alpha)^2+(y-R\sin)^2=(x-a)^2+y^2$

即 $2R(x\cos\alpha+y\sin\alpha)=R^2-a^2+2ax$　10 分

$\therefore \dfrac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{R^2-a^2+2ax}{2R\sqrt{x^2+y^2}}$

可得：$\sin(\alpha+\theta)=\dfrac{R^2-a^2+2ax}{2R\sqrt{x^2+y^2}}$ $(\sin\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \cos\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$

$\therefore \left|\dfrac{R^2-a^2+2ax}{2R\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$　(此不等式也可直接由柯西不等式得到)　　15 分

平方后可化为　$\dfrac{(x-\frac{a}{2})^2}{(\frac{R}{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{R}{2})^2-(\frac{a}{2})^2}\geqslant 1$，

即所求点的集合为椭圆圆 $\dfrac{(x-\frac{a}{2})^2}{(\frac{R}{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{R}{2})^2-(\frac{a}{2})^2}=1$ 外(含边界)的部分．　　20 分

17. 解：（Ⅰ）直线 AB、AC、BC 的方程依次为 $y=\frac{4}{3}(x+1), y=-\frac{4}{3}(x-1), y=0$。点 $P(x,y)$ 到 AB、AC、BC 的距离依次为 $d_1=\frac{1}{5}|4x-3y+4|, d_2=\frac{1}{5}|4x+3y-4|, d_3=|y|$。依设，$d_1d_2=d_3^2$，得 $|16x^2-(3y-4)^2|=25y^2$，即

$16x^2-(3y-4)^2+25y^2=0$, 或 $16x^2-(3y-4)^2-25y^2=0$，化简得点 P 的轨迹方程为

圆 S：$2x^2+2y^2+3y-2=0$ 与双曲线 $T: 8x^2-17y^2+12y-8=0$

（Ⅱ）由前知，点 P 的轨迹包含两部分

圆 S：$2x^2+2y^2+3y-2=0$　　　①

与双曲线 T：$8x^2-17y^2+12y-8=0$　　　②

因为 B（－1，0）和 C（1，0）是适合题设条件的点，所以点 B 和点 C 在点 P 的轨迹上，且点 P 的轨迹曲线 S 与 T 的公共点只有 B、C 两点。

ΔABC 的内心 D 也是适合题设条件的点，由 $d_1=d_2=d_3$，解得 $D(0,\frac{1}{2})$，且知它在圆 S 上。直线 L 经过 D，且与点 P 的轨迹有 3 个公共点，所以，L 的斜率存在，设 L 的方程为

$y=kx+\frac{1}{2}$　　③

（i）当 k=0 时，L 与圆 S 相切，有唯一的公共点 D；此时，直线 $y=\frac{1}{2}$ 平行于 x 轴，表明 L 与双曲线有不同于 D 的两个公共点，所以 L 恰好与点 P 的轨迹有 3 个公共点。......10 分

（ii）当$k\neq 0$时，L与圆S有两个不同的交点。这时，L与点P的轨迹恰有3个公共点只能有两种情况：

情况1：直线L经过点B或点C，此时L的斜率$k=\pm\frac{1}{2}$，直线L的方程为$x=\pm(2y-1)$。代入方程②得$y(3y-4)=0$，解得$E(\frac{5}{3},\frac{4}{3})$或F$(-\frac{5}{3},\frac{4}{3})$。表明直线BD与曲线T有2个交点B、E；直线CD与曲线T有2个交点C、F。

故当$k=\pm\frac{1}{2}$时，L恰好与点P的轨迹有3个公共点。

情况2：直线L不经过点B和C（即$k\neq\pm\frac{1}{2}$），因为L与S有两个不同的交点，所以L与双曲线T有且只有一个公共点。即方程组$\begin{cases}8x^2-17y^2+12y-8=0\\ y=kx+\frac{1}{2}\end{cases}$有且只有一组实数解，消去y并化简得$(8-17k^2)x^2-5kx-\frac{25}{4}=0$

该方程有唯一实数解的充要条件是$8-17k^2=0$ ④

或$(-5k)^2+4(8-17k^2)\frac{25}{4}=0$ ⑤

解方程④得$k=\pm\frac{2\sqrt{34}}{17}$，解方程⑤得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$。

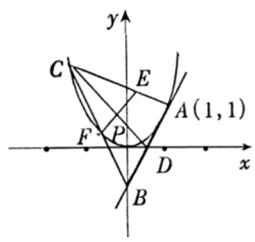
综合得直线L的斜率k的取值范围是有限集$\{0,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{2\sqrt{34}}{17},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$。

18. 解一：过抛物线上点A的切线斜率为：$y'=2x|_{x=1}=2,\therefore$ 切线AB的方程为$y=2x-1.\therefore B、D$的坐标为$B(0,-1),D(\frac{1}{2},0),\therefore D$是线段AB的中点.

设$P(x,y)$、$C(x_0,x_0^2)$、$E(x_1,y_1)$、$F(x_2,y_2)$，则由$\frac{AE}{EC}=\lambda_1$知，

$x_1=\frac{1+\lambda_1x_0}{1+\lambda_1},y_1=\frac{1+\lambda_1x_0^2}{1+\lambda_1};$ $\frac{BE}{FC}=\lambda_2,$ 得

$x_2=\frac{\lambda_2x_0}{1+\lambda_2},y_2=\frac{-1+\lambda_2x_0^2}{1+\lambda_2}.$



∴ EF所在直线方程为：

$$\frac{y-\frac{1+\lambda_1 x_0^2}{1+\lambda_1}}{\frac{-1+\lambda_2 x_0^2}{1+\lambda_2}-\frac{1+\lambda_1 x_0^2}{1+\lambda_1}}=\frac{x-\frac{1+\lambda_1 x_0}{1+\lambda_1}}{\frac{\lambda_2 x_0}{1+\lambda_2}-\frac{1+\lambda_1 x_0}{1+\lambda_1}},$$

化简得$[(\lambda_2-\lambda_1)x_0-(1+\lambda_2)]y=[(\lambda_2-\lambda_1)x_0^2-3]x+1+x_0-\lambda_2 x_0^2.\cdots$①

当$x_0\neq\frac{1}{2}$时，直线 CD 的方程为：$y=\frac{2x_0^2x-x_0^2}{2x_0-1}\cdots$②

联立①、②解得$\begin{cases}x=\frac{x_0+1}{3}\\y=\frac{x_0^2}{3}\end{cases}$，消去$x_0$，得 P 点轨迹方程为：$y=\frac{1}{3}(3x-1)^2$.

当$x_0=\frac{1}{2}$时，EF 方程为：$-\frac{3}{2}y=(\frac{1}{4}\lambda_2-\frac{1}{4}\lambda_1-3)x+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\lambda_2, CD$方程为：$x=\frac{1}{2}$，联立解得$\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=\frac{1}{12}.\end{cases}$也在 P 点轨迹上.因 C 与 A 不能重合，∴$x_0\neq1, \therefore x\neq\frac{2}{3}$.

∴所求轨迹方程为$y=\frac{1}{3}(3x-1)^2(x\neq\frac{2}{3})$.

解二：由解一知，AB 的方程为$y=2x-1, B(0,-1), D(\frac{1}{2},0)$, 故 D 是 AB 的中点.

令$\gamma=\frac{CD}{CP}, t_1=\frac{CA}{CE}=1+\lambda_1, t_2=\frac{CB}{CF}=1+\lambda_2$,则$t_1+t_2=3$.因为 CD 为$\Delta ABC$的中线，

$\therefore S_{\Delta CAB}=2S_{\Delta CAD}=2S_{\Delta CBD}$.

而

$$\frac{1}{t_1t_2}=\frac{CE\cdot CF}{CA\cdot CB}=\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CAB}}=\frac{S_{\Delta CEP}}{2S_{\Delta CAD}}+\frac{S_{\Delta CFP}}{2S_{\Delta CBD}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{t_1\gamma}+\frac{1}{t_2\gamma})=\frac{t_1+t_2}{2t_1t_2\gamma}=\frac{3}{2t_1t_2\gamma}, \therefore\gamma=\frac{3}{2},$$

$\therefore P$是ΔABC的重心.

设$P(x,y), C(x_0,x_0^2)$, 因点 C 异于 A，则$x_0\neq1$, 故重心 P 的坐标为

$$x=\frac{0+1+x_0}{3}=\frac{1+x_0}{3},(x\neq\frac{2}{3}), y=\frac{-1+1+x_0^2}{3}=\frac{x_0^2}{3},\text{消去}x_0,\text{得}y=\frac{1}{3}(3x-1)^2.$$

故所求轨迹方程为$y=\frac{1}{3}(3x-1)^2(x\neq\frac{2}{3})$.

例题答案：

1,D　令 $y=x$,得 $y=x=\pm a$,令 $y=-x$ 得 $x=-y=\pm b$,由此可见,曲线必过四个点:(a,a),

$(-a,-a)$,(b,b),$(-b,-b)$,从结构特征看,方程表示的曲线是以这四点为顶点的四边形,易知它是非正方形的菱形.

2,B　$d=\dfrac{|25x_0-15y_0+12|}{\sqrt{850}}=\dfrac{|5(5x_0-3y_0)+12|}{5\sqrt{34}}$,当 $5x_0-3y_0=-2$(可取 $x_0=y_0=-1$)时,

$d_{\min}=\dfrac{\sqrt{34}}{85}$(其中 (x_0,y_0) 为平面上任意整点).

3,A　此抛物线的焦点与原点重合,得直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}x$,因此 A,B 两点的横坐标

满足方程:$3x^2-8x-16=0$.由此求得弦 AB 中点的横坐标 $x_0=\frac{4}{3}$,纵坐标 $y_0=\frac{4}{\sqrt{3}}$,进而

求得其中垂线方程为 $y-\frac{4}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{4}{3})$,令 $y=0$,得 P 点的横坐标 $x=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$,

即 PF=$\frac{16}{3}$.

4,C 设 $P(x_0,y_0)$,又椭圆的右准线为 $x=9$,而 $|PF_1|=2|PF_2|$,且 $|PF_1|+|PF_2|=12$,

得 $|PF_2|=4$,又 $\frac{|PF_2|}{9-x_0}=e=\frac{2}{3}$,得 $x_0=3$,代入椭圆方程得 $y_0=\pm\sqrt{15}$.

5,A (1)当 $AB\perp x$轴时, $S_{\Delta AFB}=\frac{1}{2}\cdot(2b)\cdot c=bc$;

(2)当 AB 与 x轴不垂直时,设 AB 的方程为 $y=kx$,由 $\begin{cases}y=kx\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 消去 x得 $y^2=\frac{k^2a^2b^2}{b^2+k^2a^2}$.

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则 $y_1=\frac{kab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}$, $y_2=-\frac{kab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}$,

$$S_{\Delta AFB}=\frac{1}{2}c(|y_1|+|y_2|)=\frac{1}{2}c\frac{2ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}|k|=abc\sqrt{\frac{k^2}{b^2+k^2a^2}}=abc\sqrt{\frac{1}{\frac{b^2}{k^2}+a^2}}<bc.$$

6,A 由 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\theta=(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1||PF_2|$

$(1-\cos\theta)$,得 $|PF_1||PF_2|=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$, $S_{\Delta F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta=b^2\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=b^2\cot\frac{\theta}{2}$.

7,$[-\frac{4}{5},\frac{1}{2}]$ 设线段 PQ 上任一点 $M(x_0,y_0)$且令 $\frac{PM}{PQ}=t(0\le t\le 1)$,则 $x_0=(1-t)2+3t$

$=2+t$, $y_0=(1-t)(-3)+t\cdot 2=-3+5t$,故 $a(2+t)+(-3+5t)+2=0$, $t=\frac{1-2a}{a+5}$,

由 $0\le t\le 1$ 得 $0\le\frac{1-2a}{a+5}\le 1$,解得 $-\frac{4}{5}\le a\le\frac{1}{2}$.

8,$y^2=4ax$ 设直线 l的方程为 $y=k(x-a)$,则 Q 点坐标为 $(0,-ka)$,直线 QT 的方程为

$y=-\frac{1}{k}x-ka$,所以 T 点坐标为 $(-k^2a,0)$,从而 P 点坐标为 $(k^2a,-2ka)$,设 P 的坐标为

(x,y),则$\begin{cases}x=k^2a\\y=-2ka\end{cases}$,消去$k$可得P点轨迹方程为$y^2=4ax$.

9,$[\sqrt{5},\sqrt{6}]$ 由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\x+y=1\end{cases}$,可得$(a^2+b^2)x^2+2a^2x+a^2-a^2b^2=0$ ①

由$OM\perp ON$得$x_1x_2+y_1y_2=0$,即$2x_1x_2-(x_1+x_2)+1=0$,将$x_1+x_2=-\dfrac{2a^2}{a^2+b^2}$,

$x_1x_2=\dfrac{a^2-a^2b^2}{a^2+b^2}$代入得$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=2$,即$\dfrac{1}{b^2}=2-\dfrac{1}{a^2}$,因为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le\dfrac{c}{a}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,得

$\dfrac{1}{3}\le1-\dfrac{b^2}{a^2}\le\dfrac{1}{2}$,得$\dfrac{1}{2}\le\dfrac{b^2}{a^2}\le\dfrac{2}{3}$,有$\dfrac{3}{2}\le a^2\cdot(2-\dfrac{1}{a^2})\le2$,解得$\sqrt{5}\le2a\le\sqrt{6}$.

10,$\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ 延长NM与椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$的右准线$l$: $x=8$相交于D,设$M(x,y)$,则

$|MD|=8-x$,因$e=\dfrac{1}{2}$,$2a=8$,得$|MF_2|=\dfrac{1}{2}|MD|=\dfrac{1}{2}(8-x)$,$|MF_1|=8-|MF_2|=\dfrac{1}{2}(8+x)$,

又$|MN|^2=|MF_1||MF_2|$,得$x^2=\dfrac{64}{5}$,故$|MN|=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

11,$3\sqrt{3}$ 设点C在x轴上方,由ΔABC是等边三角形得直线AB的斜率$k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,又直线

过$A(-1,0)$点,故方程为$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,代入双曲线方程$x^2-y^2=1$,得点B的坐标为

$(2,\sqrt{3})$,同理可得C的坐标为$(2,-\sqrt{3})$,所以ΔABC的面积为$[2-(-1)]\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

12,$m-a$ 不妨设P为第一象限的一点,则$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{m}$,$|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{a}$,得

$|PF_1|=\sqrt{a}+\sqrt{m}$,$|PF_2|=\sqrt{m}-\sqrt{a}$,于是$|PF_1||PF_2|=m-a$.

13,:(1)证明:易知直线OP的方程为$y=\sqrt{3}x$,将此方程代入$3x^2+y^2=6$,可求得交点

P(1, $\sqrt{3}$).由题意可设直线PA,PB的方程分别为$y-\sqrt{3}=-k(x-1)$和$y-\sqrt{3}=k(x-1)$,

分别与椭圆方程联立,可求得A,B的横坐标分别为$x_A=\dfrac{k^2+2\sqrt{3}k-3}{3+k^2}$,$x_B=\dfrac{k^2-2\sqrt{3}k-3}{3+k^2}$.

从而 $y_A=\dfrac{-k(2\sqrt{3}k-6)}{3+k^2}+\sqrt{3},y_B=\dfrac{k(-2\sqrt{3}k-6)}{3+k^2}+\sqrt{3}$,

所以 $k_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{12k}{3+k^2}\cdot\dfrac{3+k^2}{4\sqrt{3}k}=\sqrt{3}$(定值).

(2)不妨设直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}x+b$,与椭圆方程联立,并消去 y 得 $6x^2+2\sqrt{3}bx+(b^2-6)=0$,有 $|AB|^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=4(x_A-x_B)^2 4[(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B]$

$$=4[(-\frac{\sqrt{3}}{3}b)^2-\frac{2}{3}(b^2-6)]=-\frac{4}{3}b^2+16$$

点 P 到战线 AB 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{3}-\sqrt{3}+b|}{2}=\dfrac{|b|}{2}$,所以 $S^2_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{b^2}{4}\times(16-\dfrac{4}{3}b^2)=$

$\dfrac{b^2}{12}(12-b^2)\le\dfrac{1}{12}[\dfrac{b^2+(12-b^2)}{2}]^2=3$,当且仅当 $b^2=12-b^2$,即 $b=\pm\sqrt{6}$ 时,

$(S_{\Delta PAB})_{\max}=\sqrt{3}$.

14,解(1),以 O 为原点,$\angle AOB$的平分线为 x轴建立直角坐标系,则可设 $P(a\cos\dfrac{\theta}{2},a\sin\dfrac{\theta}{2})$ $Q(b\cos\dfrac{\theta}{2},-b\sin\dfrac{\theta}{2})$.于是 ΔOPQ的重心 $G(x_G,y_G)$的坐标为

$$x_G=\frac{1}{3}(a\cos\frac{\theta}{2}+b\cos\frac{\theta}{2}+0)=\frac{1}{3}(a+b)\cos\frac{\theta}{2},$$
$$y_G=\frac{1}{3}(a\sin\frac{\theta}{2}-b\sin\frac{\theta}{2}+0)=\frac{1}{3}(a-b)\sin\frac{\theta}{2}$$

$|OG|^2=x_G{}^2+y_G{}^2=\dfrac{1}{9}(a^2+b^2)+\dfrac{2}{9}ab(\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2})=\dfrac{1}{9}(a^2+b^2)+\dfrac{2}{9}ab\cos\theta$

$\ge\dfrac{1}{9}\cdot 2ab+\dfrac{2}{9}ab\cos\theta=\dfrac{4}{9}ab\cos^2\dfrac{\theta}{2}$.

又已知 $S_{\Delta OPQ}=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta=36$,得 $ab=\dfrac{72}{\sin\theta}$,于是$|OG|\ge\sqrt{\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{72}{\sin\theta}\cdot\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$

$=\sqrt{16\cot\dfrac{\theta}{2}}=4\sqrt{\cot\dfrac{\theta}{2}}$,且当 $a=b=\sqrt{\dfrac{72}{\sin\theta}}$ 时等号成立,故$|OG|_{\min}=4\sqrt{\cot\dfrac{\theta}{2}}$.

(2),设 $M(x,y)$,则由 $|OM|=\dfrac{3}{2}|OG|$ 得, $x=\dfrac{3}{2}x_G=\dfrac{1}{2}(a+b)\cos\dfrac{\theta}{2}>0$, $y=\dfrac{3}{2}y_G=\dfrac{1}{2}(a-\text{b})$

$\sin\frac{\theta}{2}$,得 $a=\frac{x}{\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{y}{\sin\frac{\theta}{2}}$, $b=\frac{x}{\cos\frac{\theta}{2}}-\frac{y}{\sin\frac{\theta}{2}}$,代入 $ab=\frac{72}{\sin\theta}$,并整理得

$\frac{x^2}{36\cot\frac{\theta}{2}}-\frac{y^2}{36\tan\frac{\theta}{2}}=1(x>0)$,这就是所求动点 M 的轨迹方程.

15,解:(1)抛物线 $y^2=2px$ 的焦点为 $(\frac{p}{2},0)$,设 l 的直线方程为 $y=k(x-\frac{p}{2})\ (k\neq 0)$.

由 $\begin{cases} y^2=2px \\ y=k(x-\frac{p}{2}) \end{cases}$ 得 $k^2x^2-(pk^2+2p)x+\frac{1}{4}p^2k^2=0$,设 M,N 的横坐标分别为 x_1,x_2

则 $x_1+x_2=\frac{pk^2+2p}{k^2}$,得 $x_P=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{pk^2+2p}{2k^2}$, $y_P=k(\frac{pk^2+2p}{2k^2}-\frac{p}{2})=\frac{p}{k}$,

而 $PQ\perp l$,故 PQ 的斜率为 $-\frac{1}{k}$,PQ 的方程为 $y-\frac{p}{k}=-\frac{1}{k}(x-\frac{pk^2+2p}{2k^2})$.

代入 $y_Q=0$ 得 $x_Q=p+\frac{pk^2+2p}{2k^2}=\frac{3pk^2+2p}{2k^2}$.设动点 R 的坐标 (x,y),则

$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(x_P+x_Q)=p+\frac{p}{k^2} \\ y=\frac{1}{2}(y_P+y_Q)=\frac{p}{2k} \end{cases}$,因此 $p(x-p)=\frac{p^2}{k^2}=4y^2(y\neq 0)$,

故 PQ 中点 R 的轨迹 L 的方程为 $4y^2=p(x-p)(y\neq 0)$.

(2),显然对任意非零整数 t,点 $(p(4t^2+1),pt)$ 都是 L 上的整点,故 L 上有无穷多个整点.

反设 L 上有一个整点(x,y)到原点的距离为整数 m,不妨设 $x>0,y>0,m>0$,则

$\begin{cases} x^2+y^2=m^2 \quad (i) \\ 4y^2=p(x-p)(ii) \end{cases}$,因为 p 是奇素数,于是 $p|y$,从 (ii) 可推出 $p|x$,再由 (i) 可推出

$p|m$,令 $x=px_1,y=py_1,m=pm_1$,则有 $\begin{cases} {x_1}^2+{y_1}^2={m_1}^2 \quad (iii) \\ 4{y_1}^2=x_1-1 \quad (iv) \end{cases}$,

由 $(iii),(iv)$ 得 ${x_1}^2+\frac{x_1-1}{4}={m_1}^2$,于是 $(8x_1+1)^2-(8m_1)^2=17$,即

$(8x_1+1+8m_1)(8x_1+1-8m_1)=17$,于是 $8x_1+1+8m_1=17$, $8x_1+1-8m_1=1$,

得 $x_1 = m_1 = 1$,故 $y_1 = 0$,有 $y = py_1 = 0$,但 L 上的点满足 $y \neq 0$,矛盾!
因此,L 上任意点到原点的距离不为整数.

§19 立体图形，空间向量

一. 直线,平面之间的平行与垂直的证明方法

1．运用定义证明(有时要用反证法);　　2．运用平行关系证明;

3．运用垂直关系证明;　　4．建立空间直角坐标系,运用空间向量证明.

例如,在证明:直线 $a \perp$ 直线 b 时.可以这样考虑

(1)运用定义证明直线 a 与 b 所成的角为 90^0;　　(2)运用三垂线定理或其逆定理;

(3)运用"若 $a \perp$ 平面 α , $b \subset \alpha$,则 $a \perp b$";　　(4)运用"若 $b // c$ 且 $a \perp c$,则 $a \perp b$";

(5)建立空间直角坐标系,证明 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

二. 空间中的角和距离的计算

1．求异面直线所成的角

(1)(平移法)过 P 作 $a'//a$, $b'//b$,则 a' 与 b' 的夹角就是 a 与 b 的夹角;

(2)证明 $a\perp b$ (或 $a//b$),则 a 与 b 的夹角为 90^0 (或 0^0);

(3)求 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 所成的角($\theta\in[0,\pi]$),再化为异面直线 a 与 b 所成的角($\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}]$).

2,求直线与平面所成的角

(1) (定义法)若直线 a 在平面 α 内的射影是直线 b ,则 a 与 b 的夹角就是 a 与 α 的夹角;

(2) 证明 $a\perp\alpha$ (或 $a//\alpha$),则 a 与 α 的夹角为 90^0(或 0^0);

(3) 求 $\bar{a}$ 与 α 的法向量 $\bar{n}$ 所成的角 θ ,则 a 与 α 所成的角为 $90^0-\theta$ 或 $\theta-90^0$.

3．求二面角

(1) (直接计算)在二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的半平面 α 内任取一点 $P\notin AB$,过 P 作 AB 的垂线,

交 AB 于 C,再过 P 作 β 的垂线,垂足为 D,连结 CD,则 $CD\perp AB$,故 $\angle PCD$ 为所求的二面角.

(2) (面积射影定理)设二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的大小为 θ ($\theta\neq 90^0$),平面 α 内一个平面图形 F

的面积为 S_1,F 在 β 内的射影图形的面积为 S_2,则 $\cos\theta=\pm\frac{S_2}{S_1}$.(当 θ 为钝角时取“ $-$ ”).

(3) (异面直线上两点的距离公式): $EF^2=d^2+m^2+n^2-2mn\cos\theta$,其中 θ 是二面角

$\alpha-AB-\beta$ 的平面角,EA 在半平面 α 内且 $EA\perp AB$ 于点 A,BF 在半平面 β 内且 FB $\perp$ AB 于 B,而 $AB=d$, $EA=m$, $FB=n$.

(4) (三面角的余弦定理),三面角 $S-ABC$ 中, $\angle BSC=\alpha$, $\angle CSA=\beta$, $\angle ASB=\gamma$,又二面角

$$B-SA-C=\theta,\text{则}\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

(5)(法向量法)平面 α 的法向量 $\overline{n_1}$ 与平面 β 的法向量 $\overline{n_2}$ 所成的角为 θ ,则所求的二面角为 θ (同类)或 $\pi-\theta$ (异类).

4.求两点 A,B 间距离

(1)构造三角形进行计算; (2),导面直线上两点间的距离公式; (3),求 $|\overline{AB}|$.

5.求点到直线的距离

(1)构造三角形进行计算; (2)转化为求两平行红色之间的距离.

6.求点到平面的距离

(1)直接计算从点到平面所引垂线段的长度; (2)转化为求平行线面间的距离或平行平面间的距离; (3) (体积法)转化为求一个棱锥的高 $h=\frac{3V}{S}$,其中 V 为棱锥体积,S 为底面面积, h 为底面上的高.(4)

在平面上取一点 A,求 $\overline{AP}$ 与平面的法向量 n 的夹角的余弦 $\cos\theta$,则点 P 到平面

的距离为 $d=\left|\overline{AP}\right|\cdot\left|\cos\theta\right|$.

7.求异面直线的距离

(1)(定义法)求异面直线公垂线段的长; (2)(体积法)转化为求几何体的高;

(3)(转化法)转化为求平行线面间的距离或平行平面间的距离;

(4)(最值法)构造异面直线上两点间距离的函数,然后求函数的最小值;

(5)(射影法)如果两异面直线 a,b 在同一平面内的射影分别是一个点 P 和一条直线 l,

则 a 与 b 的距离等于 P 到 l 的距离; (6)(公式法) $d^2=EF^2-m^2-n^2\pm2mn\cos\theta$.

8.求平行的线线,线面,面面之间的距离的方法,通常是转化为求点与线或点与面之间的距离.

三.多面体与旋转体

1.柱体(棱柱和圆柱)

(1)侧面积 $S_{侧}=c\cdot l$(c 为直截面周长, l 为侧棱或母线长)(2)体积 $V=Sh$(S 为底面积, h 为高)

2.锥体(棱锥与圆锥)

(1)正棱锥的侧面积 $S_{侧}=\frac{1}{2}c\cdot h'$(c 为底面周长, h' 为斜高)(2)圆锥的侧面积: $S_{侧}=\pi rl$

(r 为底面周长, l 为母线长)(3)锥体的体积: $V=\frac{1}{3}Sh$(S 为底面面积, h 为高).

3.锥体的平行于底面的截面性质: $\frac{S_1}{S}=\frac{h_1^2}{h^2},\frac{V_1}{V}=\frac{h_1^3}{h^3}$.

4.球的表面积: $S=4\pi R^2$; 球的体积: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

四.解题思想与方法导引

1.空间想象能力; 2.数形结合能力; 3.平几与立几间的相互转化; 4.向量法

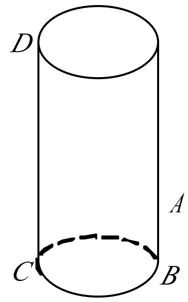
例题讲解

1．正四面体的内切球和外接球的半径之比为(　　)

A,1:2　　B,1:3　　C,1:4　　D,1:9

2．由曲线 $x^2=4y,x^2=-4y,x=4,x=-4$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周所得的几何体的体积为 V_1;满足 $x^2+y^2\le16,x^2+(y-2)^2\ge4,x^2+(y+2)^2\ge4$ 的点 (x,y) 组成的图形绕 y 轴旋转一周所得的几何体的体积为 V_2,则(　　)

A, $V_1=\frac{1}{2}V_2$ B, $V_1=\frac{2}{3}V_2$ C, $V_1=V_2$ D, $V_1=2V_2$



3．如右图,底面半径 $r=1$,被过 A,D 两点的倾斜平面所截,截面是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆,若圆柱母线截后最短处 $AB=1$,则截面以下部分的几何体体积是(　　)

A, $\frac{3\pi}{2}$ B, 2π C, π D, $(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\pi$

4．在四面体 ABCD 中,设 $AB=1$, $CD=\sqrt{3}$,直线 AB 与 CD 的距离为 2,夹角为 $\frac{\pi}{3}$,则四面体 ABCD 的体积等于(　　)

A, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B, $\frac{1}{2}$ C, $\frac{1}{3}$ D, $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5．三个圆柱侧面两两相切,且它们的轴也两两相互垂直,如果每个圆柱底面半径都是 1,那么,与这三个圆柱侧面都相切的最小球的半径是(　　)

A, $\sqrt{2}-1$ B, $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ C, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D, $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

6．四面体 ABCD 的顶点为 A,B,C,D,其 6 条棱的中点为 M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6,共 10 个点,任取 4 个点,则这 4 个点不共面的概率是(　　)

A, $\frac{5}{7}$ B, $\frac{7}{10}$ C, $\frac{24}{35}$ D, $\frac{47}{70}$

7．正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a,则异面直线 CD' 与 BD 间的距离等于___________.

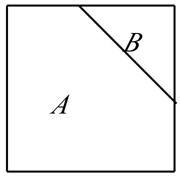
8．正四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\angle ASB=45^0$,二面角 $A-SB-C$ 为 θ 且 $\cos\theta=m+\sqrt{n}$,(m, n 为整数),则 $m+n=$___________________.

9．在正三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=a$, $PA=2a$,过 A 作平面分别交平面 PBC 于 DE.当截面 ΔADE 的周长最小时, $S_{\Delta ADE}=$___________,P 到截面 ADE 的距离为_____________.

10．空间四个球,它们的半径分别是 2,2,3,3.每个球都与其他三个球外切.另一个小球与这

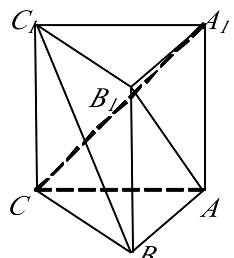
四个球都相切,则这个小球的半径等于________.

11．三个12×12的正方形都被连接两条邻边的中点的直线分成 A,B 两片,如图,把这六片粘在一个正六边形的外面,然后折成多面体,则这个多面体的体积为__________.

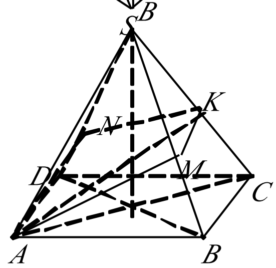


12．直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$中,平面 $A_1BC\perp$平面 ABB_1A_1,且 $AC=\sqrt{3}AA_1$,则 AC 与平面 A_1BC所成的角 θ 的取值范围是________.

13．如图,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$中, $AC=BC$,连接 AB_1, BC_1, CA_1,若 $AB_1\perp BC_1$,求证: $AB_1\perp CA_1$



14．如图,设 $S-ABCD$是一个高为 3,底面边长为 2 的正四棱锥,K 是棱 SC 的中点,过 AK 作平面与线段 SB,SD 分别交于 M,N (M,N 可以是线段的端点).试求四棱锥 $S-AMKN$的体积 V 的最大值与最小值.



15．有一个 $m\times n\times p$ 的长方体盒子,另有一个$(m+2)\times(n+2)\times(p+2)$的长方体盒子,其中 m,n,p 均为正整数($m\le n\le p$),并且前者的体积是后者一半,求 p 的最大值.

课后练习

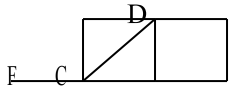
1．甲烷分子由一个碳原子和四个氢原子组成,其空间构型为一正四面体,碳原子位于该正四面体的中心,四个氢原子分别位于该正四面体的四个顶点上.若将碳原子和氢原子均视为一个点(体积忽略不计),且已知碳原子与每个氢原子间的距离都为 a,则以四个氢原子为顶点的这个正四面体的体积为(　　)

A, $\frac{8}{27}a^3$　　　B, $\frac{8\sqrt{3}}{27}a^3$　　　C, $\frac{1}{3}a^3$　　　D, $\frac{8}{9}a^3$

2．夹在两个平行平面之间的球,圆柱,圆锥在这两个平面上的射影都是圆,则它们的体积之比为(　　)

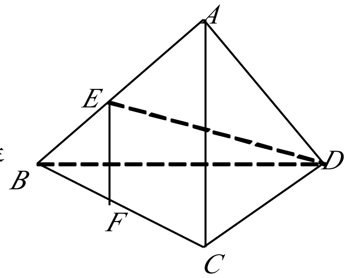
A,3:2:1　　　B,2:3:1　　　C,3:6:2　　　D,6:8:3

3．设二面角$\alpha-a-\beta$的大小是60^0,P 是二面角内的一点,P 点到α,β的距离分别为 1cm, 2cm,则点 P 到棱a的距离是(　)



A, $\frac{2\sqrt{21}}{3}cm$　　B, $\frac{\sqrt{21}}{3}cm$　　C, $\frac{2}{3}cm$　　D, $\frac{4\sqrt{21}}{3}cm$

4．如图,E,F 分别是正三棱锥 A－BCD 的棱 AB,BC 的中点,且 DE⊥EF.若 BC= a,则此正三棱锥的体积是(　)



A, $\frac{a^3}{24}$　　B, $\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$

C, $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$　　D, $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$

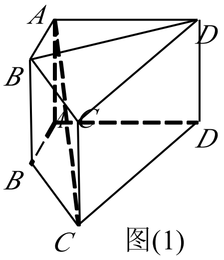
5．棱长为的正八面体的外接球的体积是(　)

A, $\frac{\pi}{6}$　　B, $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$　　C, $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$　　D, $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

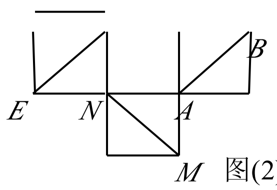
6．若线段 AB 的两端点到平面α的距离都等于 2,则线段 AB 所在的直线和平面α的位置关系是______________________.

7．若异面直线a,b所原角为60^0,AB 是公垂线,E,F 分别是异面直线a,b上到 A,B 距离为 2 和平共处的两点,当$|EF|=3$时,线段 AB 的长为____________________.

8．如图(1),在直四棱柱$A_1B_1C_1D_1-ABCD$中,当底面四边形$ABCD$满足条件____________时,有$A_1C\perp B_1D_1$(注:填上你认为正确的一种条件即可,不必考虑所有可能的情形)



图(1)



图(2)

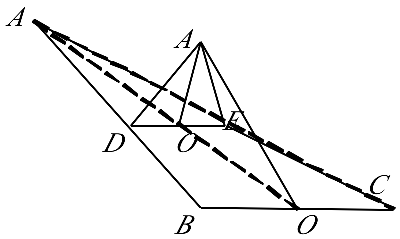
9．如图(2),是一个正方体的展开图,在原正方体中,有下列命题:

①AB 与 EF 所连直线平行;　　②AB 与 CD 所在直线异面;

③MN 与 BF 所在直线成 60^0；　　　④MN 与 CD 所在直线互相垂直.

其中正确命题的序号为________.(将所有正确的都写出)

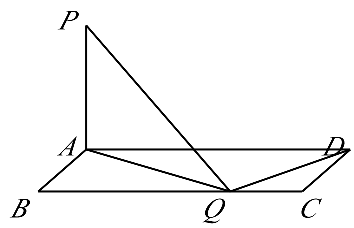
10．如图,在ΔABC中,AB=AC=13,BC=10,DE//BC 分别交 AB,AC 于 D,E.将ΔADE沿 DE 折起来使得 A 到 A_1,且 A_1-DE-B 为 60^0 的二面角,求 A_1 到直线 BC 的最小距离.



11．如图,已知矩形 ABCD 中,AB=1,BC= a $(a>0)$,PA⊥平面 ABCD,且 PA=1.

(1)问 BC 边上是否存在点 Q 使得 PQ⊥QD?并说明理由;

(2)若边上有且只有一个点 Q,使得 PQ⊥QD,求这时二面角 Q$-PD-A$的正切.



课后习题答案

1．过顶点 A,V 与高作一截面交 BC 于点 M,点 O 为正四面体的中心, O_1为底面 ABC 的中心,

设正四面体 VABC 的棱长为 m,则 AM=$\frac{\sqrt{3}}{2}m$=VM, $O_1M=\frac{1}{3}AM=\frac{\sqrt{3}}{6}m$,

$O_1A=\frac{2}{3}AM=\frac{\sqrt{3}}{3}m$, $VO_1=\sqrt{VM^2-O_1M^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}m$,得 $OO_1=VO_1-VO=\frac{\sqrt{6}}{3}m-a$

在$Rt\Delta AOO_1$中,$AO^2=OO_1^2+AO_1^2$,即$a^2=(\frac{\sqrt{6}}{3}m-a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}m)^2$,得$m=\frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

则$VO_1=\frac{4}{3}a$,有$V_{V-ABC}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot m^2\cdot\sin 60^0)\cdot VO_1=\frac{8\sqrt{3}}{27}a^3$.选 B.

温馨提示:正四面体外接球的半径VO:内切球的半径$OO_1=a:\frac{1}{3}a=3:1$.

2． $V_1:V_2:V_3=(\frac{4}{3}\pi R^3):(\pi R^2\cdot 2R):(\frac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot 2R)=2:3:1$,选 B.

3．设 PA⊥棱a于点 A,PM⊥平面α于点 M,PN⊥平面β于点 N,PA=t,$\angle PAM=\theta$,则

$\begin{cases}t\sin\alpha=1\\t\sin(60^0-\alpha)=2\end{cases}$,得$\sqrt{3}\cos\alpha=5\sin\alpha$,有$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$或$-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$(舍去),

所以$t=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{21}}{3}cm$,选 B.

4．由 DE⊥EF,EF//AC,有 DE⊥AC,又 AC⊥BD,DE$\cap$BD=D,得 AC⊥平面 ABD.

由对称性得$\angle BAC=\angle CAD=\angle BAD=90^0$,于是$AB=AC=AD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$V_{B-ACD}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$,选 B.

5．可由两个相同的四棱锥底面重合而成,有$2r=\sqrt{2}$,得$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

外接球的体积$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$,选 D.

6．当$|AB|<2$时,AB//α;当$|AB|=2$时,AB//α或 AB⊥α;当$|AB|>2$时,AB//α或与α斜交.

7．由$\overline{EF}=\overline{EA}+\overline{AB}+\overline{BF}$,得$|\overline{EF}|^2=|\overline{EA}|^2+|\overline{AB}|^2+|\overline{BF}|^2+2|\overline{EA}|\cdot|\overline{BF}|\cdot\cos\theta$

(1)当$\theta=60^0$时,有$9=4+|\overline{AB}|^2+1+2\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$,得$|\overline{AB}|=\sqrt{2}$;

(2)当$\theta=120^0$时,有$9=4+|\overline{AB}|^2+1-2\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$,得$|\overline{AB}|=\sqrt{6}$.

8． AC⊥BD.(或 ABCD 是正方形或菱形等)

9．将展开的平面图形还原为正方体$NACF-EMBD$,可得只②,④正确.

10．解:设ΔABC的高 AO 交 DE 于点O_1,令$AO_1=x$,

由 AO=$\sqrt{13^2-5^2}=12$,有 $OO_1=12-x$,

在ΔA_1OO_1中,$\angle A_1O_1O=60^0$,有 $A_1O^2=A_1O_1^2+O_1O^2-2\cdot A_1O_1\cdot O_1O\cdot\cos 60^0$

得 $A_1O=\sqrt{3(x-6)^2+36}$.

当$x=6$时,A_1到直线 BC 的最小距离为 6.

11．解:(1)(如图)以 A 为原点建立空间直角坐标系,设 $BQ=x$,则

Q $(1,x,0)$,P(0,0,1),D $(0,a,0)$ 得 $\overline{PQ}=(1,x,-1)$, $\overline{QD}=(-1,a-x,0)$

由 $\overline{PQ}\perp\overline{QD}$,有 $(1,x,-1)\cdot(-1,a-x,0)=0$,得 $x^2-ax+1=0$ ①

若方程①有解,必为正数解,且小于 a.由 $\Delta=(-a)^2-4\geq 0$, $a>0$,得 $a\geq 2$.
(i)当 $a\geq 2$ 时,BC 上存在点 Q,使 PQ⊥QD;
(ii)当 $0<a<2$ 时, BC 上不存在点 Q,使 PQ⊥QD.
(2)要使 BC 边上有且只有一个点 Q,使 PQ⊥QD,则方程①有两个相等的实根,

这时,$\Delta=(-a)^2-4=0$,得 $a=2$,有 $x=1$.

又平面 APD 的法向量 $n_1=(1,0,0)$,设平面 PQD 的法向量为 $n_2=(x,y,z)$

而 $\overline{QD}=(-1,1,0)$, $\overline{PD}=(0,2,0)-(0,0,1)=(0,2,-1)$,

由$\begin{cases}n_2\cdot\overline{QD}=0\\ n_2\cdot\overline{PD}=0\end{cases}$,得$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(-1,1,0)=0\\ (x,y,z)\cdot(0,2,-1)=0\end{cases}$,解得 $x=y,z=2y$ 有 $n_2=(1,1,2)$,则

$\cos<n_1,n_2>=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{(1,0,0)\cdot(1,1,2)}{1\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$,则 $\tan<n_1,n_2>=\sqrt{5}$ 所以二面角 $Q-PD-A$

的正切为 $\sqrt{5}$.

例题答案:

1,B　设棱长为 a,外接球的半径为 R,内切球的半径为 r,则 $R^2-(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2=(\frac{\sqrt{6}}{3}a-R)^2$

解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$, $r=\frac{\sqrt{6}}{3}a-\frac{\sqrt{6}}{4}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$,有 r:R=1:3.

2,C　设 $A(0,a)(a>0)$,则过 A 的两个截面都是圆环,面积分别是 $(4^2-x^2)\pi=(4^2-4a)\pi$ 和

$(x_1^2-x_2^2)\pi=\{(4^2-a^2)-[2^2-(a-2)^2]\}\pi=(4^2-4a)\pi$,于是$V_1=V_2$.

3,B 在椭圆中$b=r=1$,又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,得$a=\sqrt{2}$,所求的体积$V=\pi\cdot1^2\cdot1+\frac{1}{2}(\pi\cdot1^2\cdot2)=2\pi$

4,B 过C作$CE\underline{\underline{//}}AB$,以$\Delta CDE$为底面,BC为侧棱作棱柱$ABF-ECD$,则所求四面体的体积$V_1$等于上述棱柱体积$V_2$的$\frac{1}{3}$,而$\Delta CDE$的面积$S=\frac{1}{2}CE\times CD\times\sin\angle ECD$,AB与CD的公垂线MN就是棱柱$ABF-ECD$的高,于是$V_2=\frac{1}{2}MN\times CE\times CD\times\sin\angle ECD=$

$\frac{1}{2}\times2\times1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$,因此$V_1=\frac{1}{3}V_2=\frac{1}{2}$.

5,A 三个圆柱的轴为三条两两垂直的异面直线,而异面直线的距离都为2,则所求球的半径为$r=\sqrt{2}-1$.

6,D $\frac{C_{10}^4-6C_6^4-6-3}{C_{10}^4}=\frac{141}{270}=\frac{47}{70}$.

7,$\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 设E是CD'上的点,过E作EH⊥DC于H,所以EH⊥面ABCD,过H在面ABCD内作HF⊥BD,连接EF,所以EF⊥BD,令$DH=x,HE=a-x,FH=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,所以EF=

$\sqrt{(a-x)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}x^2-2ax+a^2}=\sqrt{\frac{3}{2}(x-\frac{2}{3}a)^2+\frac{a^2}{3}}\geq\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

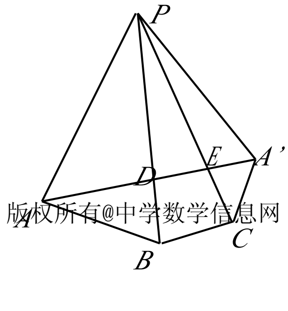
8,5 因各侧面为全等的等腰三角形.在ΔSAB内作高AE,则CE也是ΔSBC的高,故$\angle AEC=\theta$.设$SA=1$则$AE=CE=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $AB=BC=2\sin\frac{45^0}{2}$, $AC^2=AB^2+BC^2$

$=8\sin^2\frac{45^0}{2}=4(1-\cos45^0)=4-2\sqrt{2}$. $\cos\theta=\frac{AE^2+CE^2-AC^2}{2AE\cdot CE}=-3+\sqrt{8}$,

得$m+n=-3+8=5$.

9,$\frac{3\sqrt{55}}{64}a^2$; $\frac{3\sqrt{5}}{5}a$ 将三棱锥的侧棱PA剪开,当ΔADE的周长最小时,其展开图如图

ΔADE的周长即是展开图中线段AA'的长.易证$\Delta ABD\backsim\Delta PAB$,又PA=2AB=$2a$,故$AD=AB=2BD=a$,



$PD=PB-BD=\frac{3}{2}a, DE=\frac{PD}{PB}\cdot BC=\frac{3}{4}a.\Delta ADE$中,

DE 上的高 $AH=\sqrt{AD^2-(\frac{1}{2}DE)^2}=\frac{\sqrt{55}}{8}a$.于是

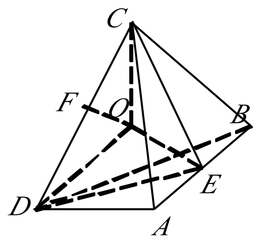
$S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}\times AH\times DE=\frac{3\sqrt{55}}{64}a^2$; 从 P 向底面作高 PO.则 PO=$\sqrt{PA^2-AO^2}$

$=\sqrt{(2a)^2-(\frac{1}{\sqrt{3}}a)^2}=\frac{\sqrt{33}}{3}a$.于是 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{33}}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{11}}{12}a^3$.

又 $\frac{S_{\Delta PDE}}{S_{\Delta PBC}}=\frac{PD^2}{PB^2}=\frac{9}{16}$,得 $V_{A-PDE}=\frac{9}{16}V_{A-PBC}=\frac{9}{16}\times\frac{\sqrt{11}}{12}a^3=\frac{3\sqrt{11}}{64}a^3$.设 P 到截面的距离

为 d,则 $V_{A-PDE}=V_{P-ADE}=\frac{1}{3}d\cdot S_{\Delta ADE}=\frac{3\sqrt{11}}{64}a^3$,于是 $d=\frac{3\sqrt{5}}{5}a$.

10, $\frac{6}{11}$　设半径为 3 的球心为 A,B,半径为 2 的球心为 C,D.则易知 AB=6,CD=4,AC=AD=BC=BD=5.设小球中心为 O,半径为 r,则 O 在四面体 ABCD 内且 AO=BO=3+r,CO=DO=2+r.取 AB 中点 E,连结 CE,DE,则 CE⊥AB,DE⊥AB,故平面 CDE 为线段 AB 的垂直平分面 α,所以 O 在平面 CDE 内,又由 OC=OD=2+r 知 O 在 CD 的垂直平分面 β 内,故 O 在等腰 ΔCED 底边 CD 上的高 EF 上(F 为 CD 中点),易算出 ED=EC=



$\sqrt{5^2-3^2}=4$,得 ΔECD 为等边三角形.于是 EF=$\frac{\sqrt{3}}{2}ED=2\sqrt{3}$.而 $OF=\sqrt{OC^2-CF^2}$

$=\sqrt{(2+r)^2-2^2}=\sqrt{r(4+r)}$.OE=$\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{(3+r)^2-3^2}=\sqrt{r(6+r)}$,代入 OE+OF

=EF=2$\sqrt{3}$ 得 $\sqrt{r(4+r)}+\sqrt{r(6+r)}=2\sqrt{3}$,解得 $r=\frac{6}{11}$.

11,864　将几何体补成一个棱长为 12 的正方体,几何体的体积为正方体体积的一半,为 $\frac{12^3}{2}$.

12, $0^0<\theta<30^0$　作 AD⊥ A_1B 于 D,易证 AD⊥平面 A_1BC,所以 $\angle ACD=\theta$.设 $AA_1=a$,

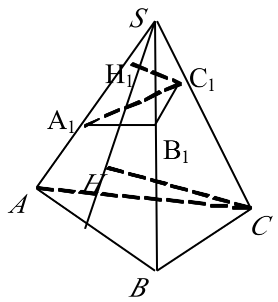
$AB=x$,则 $AD=\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sqrt{3}a\cdot\sin\theta$,故 $x^2=\frac{3a^2\sin^2\theta}{1-3\sin^2\theta}$.易证 BC⊥平面 A_1ABB_1,

故 $\angle CBA=90^0$,从而 $AB<AC$,即 $x<\sqrt{3}a$,于是 $0\le\frac{3a^2\sin^2\theta}{1-3\sin^2\theta}<3a^2,|\sin\theta|<\frac{1}{2}$,

又$0^0<\theta<90^0$,得$0^0<\theta<30^0$.

13,证明:设 D, D_1分别为 AB, A_1B_1的中点.连结 CD, C_1D_1及 BD_1, DA_1.因为 $BD \underline{\underline{//}} D_1A_1$,所以四边形 BD_1A_1D为平行四边形,得 $BD_1 // DA_1$.因 AC=BC, 于是 $B_1C_1=C_1A_1$.又 D, D_1 分别为 AB, A_1B_1 的中点,故 CD⊥AB, $C_1D_1\perp A_1B_1$,而 AB_1在平面 ABC(或 $A_1B_1C_1$)内的射影为 AB (或 A_1B_1),得 $AB_1\perp$CD, $AB_1\perp C_1D_1$,又已知 $AB_1\perp BC_1$,所以 $AB_1\perp$平面 B C_1D_1,从而 $AB_1\perp BD_1$,又 $BD_1 // DA_1$,所以 $AB_1\perp DA_1$.又 $AB_1\perp C_1D_1$,得 $AB_1\perp$平面 A_1CD,从而得证.

14,解:为了建立 V 与原四棱锥 $S-ABCD$的关系.我们先引用下面的事实:



(如图)设 A_1,B_1,C_1分别在三棱锥 $S-ABC$的侧棱 SA,SB,SC 上,

又 $S-A_1B_1C_1$与 $S-ABC$的体积分别是 V_1和 V,则

$\frac{V_1}{V}=\frac{SA_1\cdot SB_1\cdot SC_1}{SA\cdot SB\cdot SC}$.

事实上,设 C, C_1在平面 SAB 的射影分别是 H, H_1.则$\frac{C_1H_1}{CH}=\frac{SC_1}{SC}$,

又$\frac{S_{\Delta SA_1B_1}}{S_{\Delta SAB}}=\frac{SA_1\cdot SB_1}{SA\cdot SB}$,所以$\frac{V_1}{V}=\frac{\frac{1}{3}\cdot C_1H_1\cdot S_{\Delta SA_1B_1}}{\frac{1}{3}\cdot CH\cdot S_{\Delta SAB}}=\frac{SA_1\cdot SB_1\cdot SC_1}{SA\cdot SB\cdot SC}$.下面回到原题.

设$\frac{SM}{SB}=x,\frac{SN}{SD}=y$,因 $S-ABCD$的体积为$V_0=\frac{1}{3}\times3\times2^2=4$.于是由上面的事实有

$\frac{V}{\frac{1}{2}V_0}=\frac{V_{S-AMN}}{V_{S-ABD}}+\frac{V_{S-KMN}}{V_{S-CBD}}=\frac{V_{S-AMK}}{V_{S-ABC}}+\frac{V_{S-ANK}}{V_{S-ADC}}$.得$\frac{V}{2}=\frac{SM\cdot SN\cdot SA}{SB\cdot SD\cdot SA}+\frac{SM\cdot SN\cdot SK}{SB\cdot SD\cdot SC}=$
$\frac{SM\cdot SK\cdot SA}{SB\cdot SC\cdot SA}+\frac{SN\cdot SK\cdot SA}{SD\cdot SC\cdot SA}=xy+\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$,于是$y=\frac{x}{3x-1}$,

而由$0<y=\frac{x}{3x-1}\le1$, $x\le1$,得$\frac{1}{2}\le x\le1$.则$V=x+y=x+\frac{x}{3x-1}$,$(\frac{1}{2}\le x\le1)$.

又得$V'=1-\frac{1}{(3x-1)^2}=\frac{3x(3x-2)}{(3x-1)^2}$.所以

(1)当$\frac{1}{2}\le x<\frac{2}{3}$时,$V'<0$,V 为减函数,(2)当$\frac{2}{3}<x\le1$时,$V'>0$,V 为增函数.

所以得$V_{\min}=V_{x=\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}$,又$V_{x=\frac{1}{2}}=V_{x=1}=\frac{3}{2}$,得$V_{\max}=V_{x=\frac{1}{2}}=V_{x=1}=\frac{3}{2}$.

15,解:由题意, $2mnp=(m+2)(n+2)(p+2)$,得 $(1+\frac{2}{m})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{2}{p})=2$.

(1)当 $m\geq 8$ 时,由 $m\leq n\leq p$,则 $(1+\frac{2}{m})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{2}{p})\leq(1+\frac{2}{8})^3<2$,矛盾!

(2)当 $m\leq 2$ 时, $(1+\frac{2}{m})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{2}{p})>2$,矛盾!

(3)当 $m=3$ 时,则 $6np=5(n+2)(p+2)$,即 $(n-10)(p-10)=120$.
所以 p 的最大值为 130;

(4)当 $m=4$ 时,则 $4np=3(n+2)(p+2)$,即 $(n-6)(p-6)=48$.
所以 p 的最大值为 54;

(5)当 $m\geq 5$ 时, $(1+\frac{2}{p})=\frac{2}{(1+\frac{2}{m})(1+\frac{2}{n})}>\frac{2}{(1+\frac{2}{5})(1+\frac{2}{5})}$,得 $p<98$.
综上所述: p 的最大值为 130.

§20 平面几何证明

1． 线段或角相等的证明

（1）利用全等△或相似多边形；

（2）利用等腰△；

（3）利用平行四边形；

（4）利用等量代换；

（5）利用平行线的性质或利用比例关系

（6）利用圆中的等量关系等。

2．　线段或角的和差倍分的证明

（1）转化为相等问题。如要证明 $a=b\pm c$，可以先作出线段 $p=b\pm c$，再去证明 $a=p$，即所谓“截长补短”，角的问题仿此进行。

（2）直接用已知的定理。例如：中位线定理，Rt△斜边上的中线等于斜边的一半；△的外角等于不相邻的内角之和；圆周角等于同弧所对圆心角的一半等等。

3．　两线平行与垂直的证明

（1）利用两线平行与垂直的判定定理。

（2）利用平行四边形的性质可证明平行；利用等腰△的“三线合一”可证明垂直。

（3）利用比例关系可证明平行；利用勾股定理的逆定理可证明垂直等。

例题讲解

1．从⊙O 外一点 P 向圆引两条切线 PA、PB 和割线 PCD。从 A 点作弦 AE 平行于 CD，连结BE 交 CD于 F。求证：BE 平分 CD。

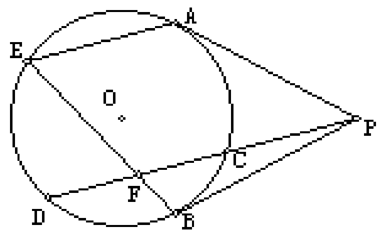


图 1

2．△ABC 内接于⊙O，P 是弧 AB 上的一点，过P 作 OA、OB 的垂线，与AC、BC 分别交于S、T，AB 交于 M、N。求证：PM=MS 充要条件是 PN=NT。

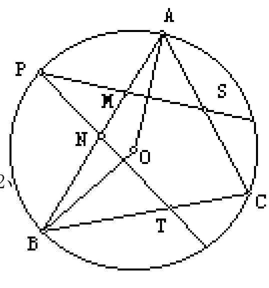


图 2

3．已知 A 为平面上两半径不等的圆 O_1 和 O_2 的一个交点，两外公切线 P_1P_2、Q_1Q_2 分别切两圆于 P_1、P_2、Q_1、Q_2，M_1、M_2 分别为 P_1Q_1、P_2Q_2 的中点。求证：$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$。

4．在△ABC 中，AB>AC，∠A 的外角平分线交△ABC 的外接圆于 D，DE⊥AB 于 E，求证：

AE= $\frac{AB-AC}{2}$ 。.

5．∠ABC 的顶点 B 在⊙O 外，BA、BC 均与⊙O 相交，过 BA 与圆的交点 K 引∠ABC 平分线的垂线，交⊙O 于 P，交 BC 于 M。

求证：线段 PM 为圆心到∠ABC 平分线距离的 2 倍。

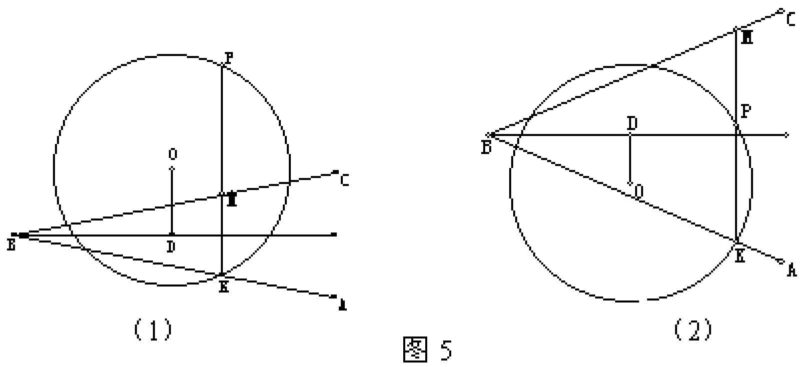


图 5

6．在△ABC 中，AP 为∠A 的平分线，AM 为 BC 边上的中线，过 B 作 BH⊥AP 于 H，AM 的延长线交 BH 于 Q，求证：PQ∥AB。

7．菱形 ABCD 的内切圆 O 与各边分别切于 E、F、G、H，在 EF 与 GH 上分别作⊙O 的切线交 AB 于 M，交 BC 于 N，交 CD 于 P，交 DA 于 Q。

求证：MQ∥NP。

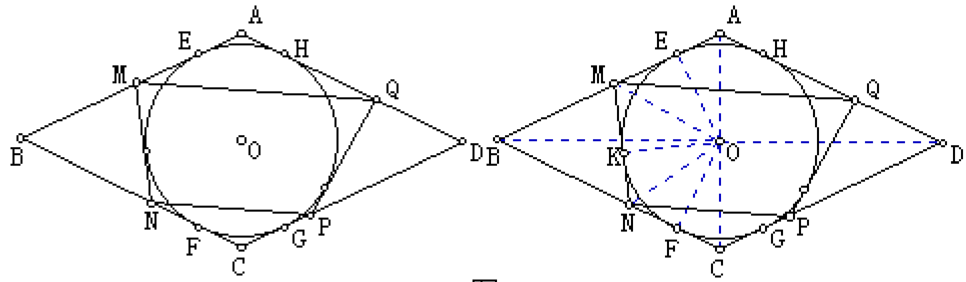
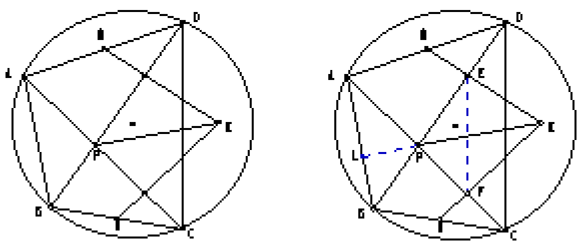


图 7

8．ABCD 是圆内接四边形，其对角线交于 P，M、N 分别是 AD、BC 的中点，过 M、N 分别作 BD、AC 的垂线交于 K。求证：KP⊥AB。


图 8

9．以△ABC 的边 BC 为直径作半圆，与 AB、AC 分别交于点 D、E。过 D、E 作 BC 的垂线，垂足分别是 F、G，线段 DG、EF 交于点 M。求证：AM⊥BC。

例题答案：

1. 分析 1：构造两个全等△。

连结 ED、AC、AF。

CF=DF←△ACF≌△EDF←

$$\leftarrow\begin{cases}\left.\begin{matrix}AC=ED\\ \angle ACF=\angle EDF\end{matrix}\right\}\leftarrow AE/\!/CD\\ \angle AFC=\angle EFD\leftarrow\begin{cases}\angle EFD=\angle AEF=\angle ABP\\ \angle AFC=\angle ABP\leftarrow A、F、B、P\text{四点共圆}\leftarrow\end{cases}\end{cases}$$

←∠PAB=∠AEB=∠PFB

分析 2：利用圆中的等量关系。连结 OF、OP、OB。

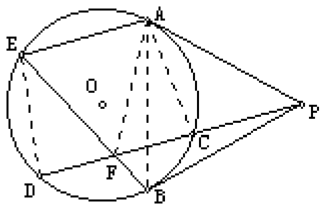


图 1-1

$$CF=DF\leftarrow\angle OFP=90^0\leftarrow\begin{cases}\angle OBP=90^0\\ O、F、B、P\text{四点共圆}\leftarrow\end{cases}$$

←∠PFB=∠POB←

$$\leftarrow\begin{cases}\angle PFB=\angle AEB\leftarrow AE/\!/CD\\ \angle POB=\angle AEB\leftarrow PA、PB\text{是切线}\end{cases}$$

注：连结 OP、OA、OF，证明 A、O、F、P 四点共圆亦可。

2. 分析：只需证 $\frac{PM}{MS}=\frac{TN}{NP}$， PM·PN=MS·NT。

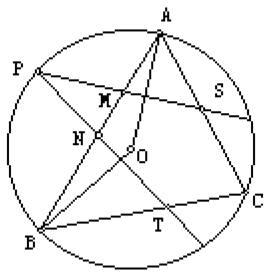


图 2

（∠1=∠2，∠3=∠4）→△APM∽△PBN

→ $\frac{PM}{BN}=\frac{AM}{PN}$ →PM·PN=AM·BN

（∠BNT=∠AMS，∠BTN=∠MAS）→△BNT∽△SMA

→ $\frac{MS}{BN}=\frac{AM}{NT}$ →MS・NT=AM・BN

3. 分析：设 B 为两圆的另一交点，连结并延长 BA 交 P_1P_2 于 C，交 O_1O_2 于 M，则 C 为 P_1P_2 的中点，且 P_1M_1∥CM∥P_2M_2，故 CM 为 M_1M_2 的中垂线。

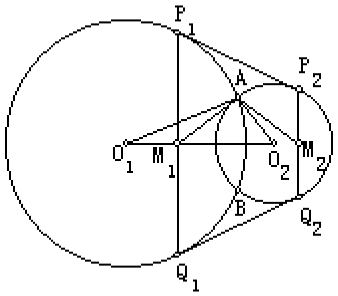


图 3

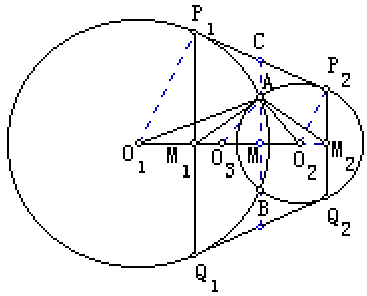


图 3-1

在 O_1M 上截取 $MO_3=MO_2$，则 $\angle M_1AO_3=\angle M_2AO_2$。

故只需证 $\angle O_1AM_1=\angle O_3AM_1$，即证 $\frac{O_1A}{AO_3}=\frac{O_1M_1}{M_1O_3}$。

由 $\triangle P_1O_1M_1\backsim P_2O_2M_2$，$M_1O_3=M_2O_2$，$O_1P_1=O_1A$，$O_2P_2=O_2A$ 可得。

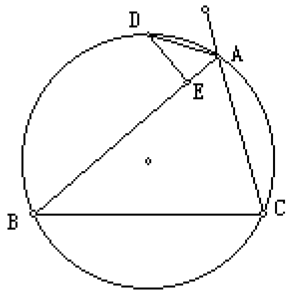


图 4

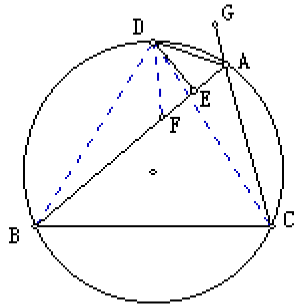


图 4-1

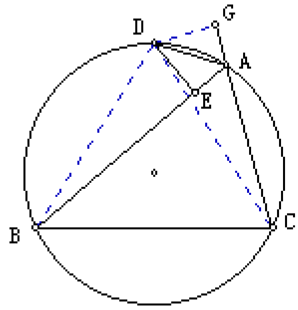


图 4-2

4. 分析：方法 1、2AE=AB−AC

← 在 BE 上截取 EF=AE，只需证 BF=AC，连结 DC、DB、DF，从而只需证△DBF≌△DCA

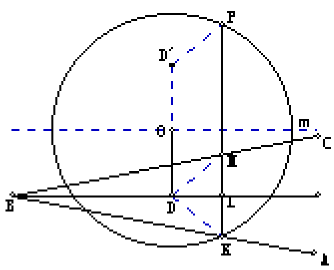
← DF=DA，∠DBF=∠DCA，∠DFB=∠DAC

←∠DFA=∠DAF=∠DAG。

方法 2、延长 CA 至 G，使 AG=AE，则只需证 BE=CG

← 连结 DG、DC、DB，则只需证△DBE≌△DCG

← DE=DG，∠DBE=∠DCG，∠DEB=∠DGC=Rt∠。



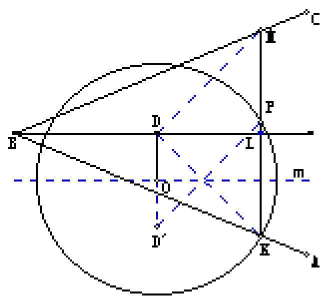


图 5-1

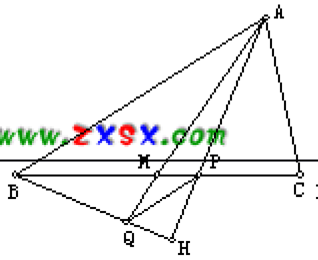


图 6

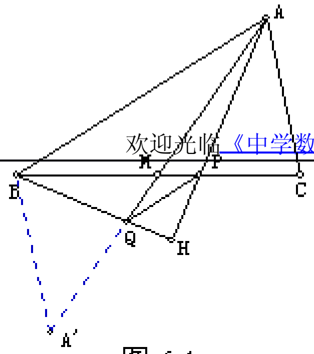


图 6-1

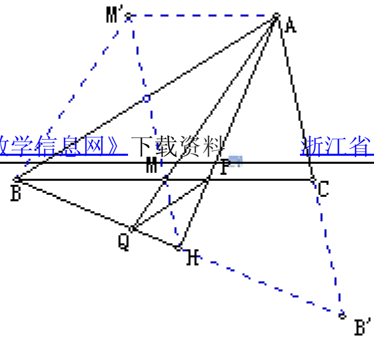


图 6-2

5.分析：若角平分线过 O，则 P、M 重合，PM=0,结论显然成立。

若角平分线不过 O，则延长 DO 至 D‘，使 OD’=OD，则只需证 DD‘=PM。连结 D’P、DM,则只需证 DMPD‘为平行四边形。

过 O 作 m⊥PK，则 $D \xrightarrow{S(m)} D'$，$K \xrightarrow{S(m)} P$，∴∠D‘PK=∠DKP

BL 平分∠ABC，MK⊥BL→BL 为 MK 的中垂线→∠DKB=∠DMK

∴∠D’PK=∠DMK，∴D‘P∥DM。而 D’ D∥PM，

∴DMPD‘为平行四边形。

6.分析：方法 1、结合中线和角平分线的性质，考虑用比例证明平行。

倍长中线：延长 AM 至 M’，使 AM=MA‘，连结 BA’，如图 6-1。

$$PQ\parallel AB \leftarrow \frac{PM}{MB}=\frac{QM}{MA} \leftarrow \frac{MB+PM}{MB-PM}=\frac{MA+QM}{MA-QM} \leftarrow \frac{BP}{PC}=\frac{AQ}{QA'}$$

$$\leftarrow \begin{cases} \frac{BP}{PC}=\frac{BA}{AC'}, AC=A'B \\ \frac{AQ}{QA'}=\frac{BA}{A'B} \leftarrow \angle ABQ=\angle A'BQ \end{cases}$$

∠A‘BQ=180°-(∠HBA+∠BAH+∠CAP)= 180°-90°-∠CAP=90°-∠BAP=∠ABQ

方法 2、结合角平分线和 BH⊥AH 联想对称知识。

延长 BH 交 AC 的延长线于 B’，如图 6-2。则 H 为 BB‘的中点，因为 M 为 BC 的中点，连结 HM，则 HM∥B′C。延长 HM 交 AB 于 O，则 O 为 AB 的中点。延长 MO 至 M’，使 OM‘=OM，连结 M’A、M‘B，则 AM’BM 是平行四边形，

∴MP∥AM‘，QM∥BM’。于是，$\frac{HP}{PA}=\frac{HM}{MM'}=\frac{HQ}{QB}$，所以 PQ∥AB。

7.分析：由 AB∥CD 知：要证 MQ∥NP，只需证∠AMQ=∠CPN，

结合∠A=∠C 知，只需证△AMQ∽△CPN← $\frac{AM}{AQ}=\frac{CP}{CN}$，AM・CN=AQ・CP。

连结 AC、BD，其交点为内切圆心 O。设 MN 与⊙O 切于 K，连结 OE、OM、OK、ON、OF。记∠ABO=φ，∠MOK=α，∠KON=β，则

∠EOM=α，∠FON=β，∠EOF=2α+2β=180°-2φ。

∴∠BON=90°-∠NOF-∠COF=90°-β-φ=α

∴∠CNO=∠NBO+∠NOB=φ+α=∠AOE+∠MOE=∠AOM

又∠OCN=∠MAO，∴△OCN∽△MAO，于是 $\frac{AM}{CO}=\frac{AO}{CN}$，

∴AM・CN=AO・CO

同理，AQ・CP=AO・CO。

8. 分析：延长 KP 交 AB 于 L，则只需证∠PAL+∠APL=90°，

即只需证∠PDC+∠KPC=90°，只需证∠PDC=∠PKF，

因为 P、F、K、E 四点共圆，故只需证∠PDC=∠PEF，即 EF∥DC。

$\frac{DE}{FC}=\frac{DP}{CP}\leftarrow\frac{DE}{FC}=\frac{DA}{CB}=\frac{2DM}{2CN}\leftarrow\frac{DE}{FC}=\frac{DM}{CN}$ ←△DME∽△CNF

9．分析：连结 BE、CD 交于 H，则 H 为垂心，故 AH⊥BC。（同一法）

设 AH⊥BC 于 O，DG、AH 交于 M_1，EF、AH 交于 M_2。下面证 M_1、M_2 重合。

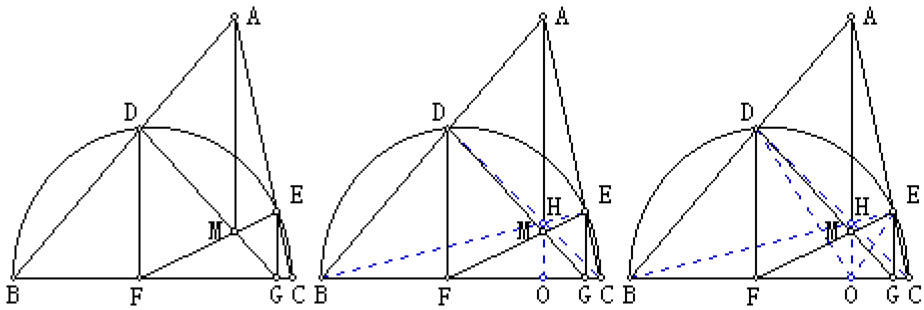


图 9

$OM_1 \parallel DF \rightarrow \dfrac{OM_1}{DF}=\dfrac{GO}{GF} \rightarrow OM_1=\dfrac{OG \bullet DF}{FG}$。

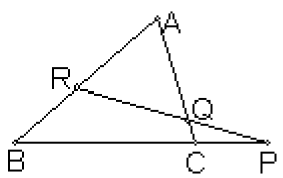
$OM_2 \parallel EG \rightarrow \dfrac{OM_2}{EG}=\dfrac{FO}{GF} \rightarrow OM_2=\dfrac{EG \bullet OF}{FG}$。

只需证 OG·DF=EG·OF，即 $\dfrac{OG}{OF}=\dfrac{EG}{DF}$

←Rt△OEG∽Rt△ODF←∠DOF=∠DHB=∠EHC=∠EOG。

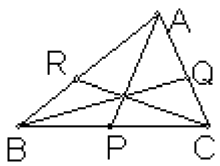
§21 平面几何名定理

四个重要定理：



梅涅劳斯(Menelaus)定理（梅氏线）

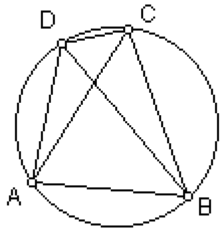
△ABC 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上有点 P、Q、R，则 P、Q、R 共线的充要条件是 $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$。



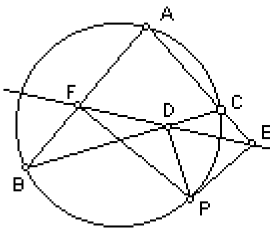
塞瓦(Ceva)定理（塞瓦点）

△ABC 的三边 BC、CA、AB 上有点 P、Q、R，则 AP、BQ、CR 共点的充要条件是 $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$。

托勒密(Ptolemy)定理



四边形的两对边乘积之和等于其对角线乘积的充要条件是该四边形内接于一圆。

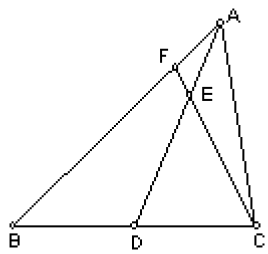


西姆松(Simson)定理（西姆松线）

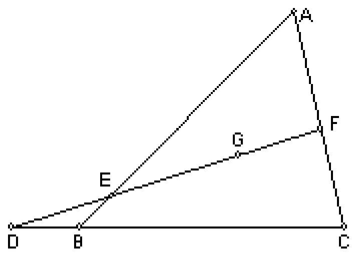
从一点向三角形的三边所引垂线的垂足共线的充要条件是该点落在三角形的外接圆上。

例题讲解

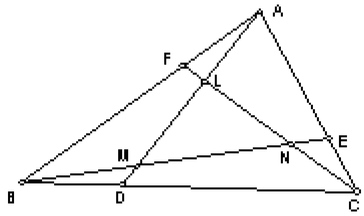
1. 设 AD 是△ABC 的边 BC 上的中线，直线 CF 交 AD 于 F。求证：$\frac{AE}{ED}=\frac{2AF}{FB}$。



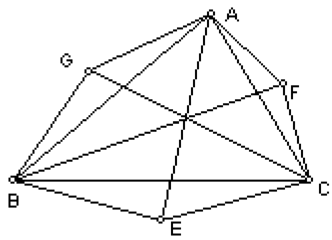
2. 过△ABC 的重心 G 的直线分别交 AB、AC 于 E、F，交 CB 于 D。求证：$\frac{BE}{EA}+\frac{CF}{FA}=1$。



3．D、E、F 分别在△ABC 的 BC、CA、AB 边上，$\frac{BD}{DC}=\frac{AF}{FB}=\frac{CE}{EA}=\lambda$，AD、BE、CF 交成△LMN。求 $S_{\triangle LMN}$。



4．以△ABC 各边为底边向外作相似的等腰△BCE、△CAF、△ABG。求证：AE、BF、CG 相交于一点。



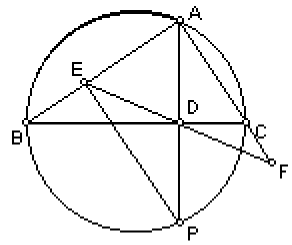
5．已知△ABC 中，∠B=2∠C。求证：$AC^2=AB^2+AB\cdot BC$。

6．已知正七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$。求证：$\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}$。

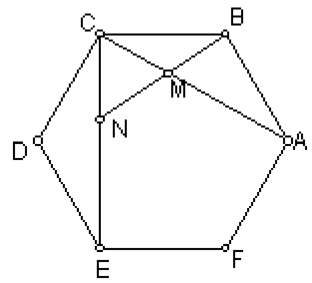


7．△ABC 的 BC 边上的高 AD 的延长线交外接圆于 P，作 PE⊥AB 于 E，延长 ED 交 AC 延长线于 F。

求证：BC • EF=BF • CE+BE • CF。



8．正六边形 ABCDEF 的对角线 AC、CE 分别被内分点 M、N 分成的比为 AM:AC=CN：CE=k，且 B、M、N 共线。求 k。（23-IMO-5）

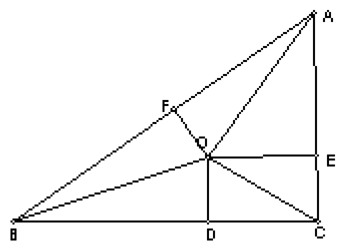


9．O 为△ABC 内一点，分别以 d_a、d_b、d_c 表示 O 到 BC、CA、AB 的距离，以 R_a、R_b、R_c 表示 O 到 A、B、C 的距离。

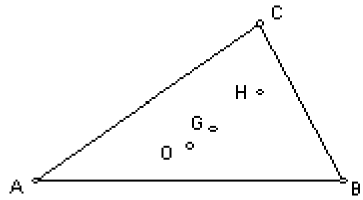
求证：（1）$a \cdot R_a \geqslant b \cdot d_b + c \cdot d_c$；

(2) $a \cdot R_a \geqslant c \cdot d_b + b \cdot d_c$；

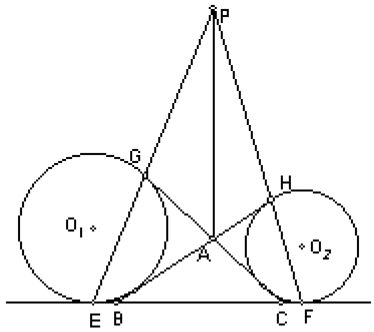
(3) $R_a + R_b + R_c \geqslant 2(d_a + d_b + d_c)$。



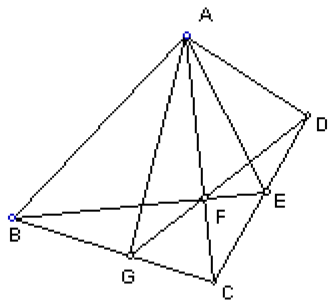
10．△ABC 中，H、G、O 分别为垂心、重心、外心。求证：H、G、O 三点共线，且 HG=2GO。（欧拉线）



11．$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 与ΔABC 的三边所在直线都相切，E、F、G、H 为切点，EG、FH 的延长线交于 P。求证：PA⊥BC。

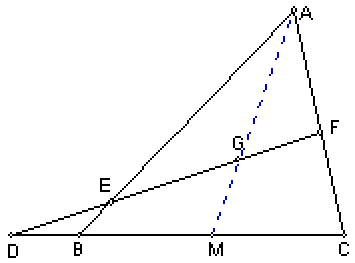


12．如图，在四边形 ABCD 中，对角线 AC 平分∠BAD。在 CD 上取一点 E，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G。求证：∠GAC=∠EAC。



例题答案：

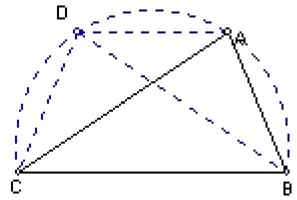
1. 分析：CEF 截△ABD→ $\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$ （梅氏定理）



评注：也可以添加辅助线证明：过 A、B、D 之一作 CF 的平行线。

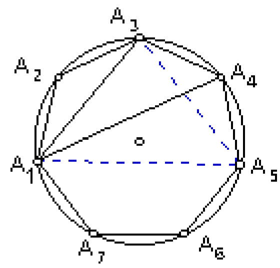
2. 分析：连结并延长 AG 交 BC 于 M，则 M 为 BC 的中点。

DEG 截△ABM→ $\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AG}{GM}\cdot\frac{MD}{DB}=1$ （梅氏定理）



DGF 截△ACM→ $\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AG}{GM}\cdot\frac{MD}{DC}=1$ （梅氏定理）

$\therefore \frac{BE}{EA}+\frac{CF}{FA}=\frac{GM\cdot(DB+DC)}{AG\cdot MD}=\frac{GM\cdot 2MD}{2GM\cdot MD}=1$



评注：梅氏定理

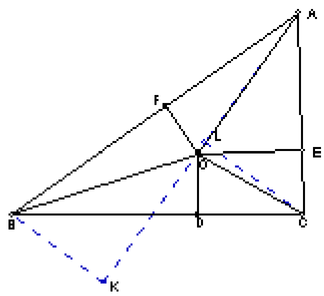
3. 梅氏定理

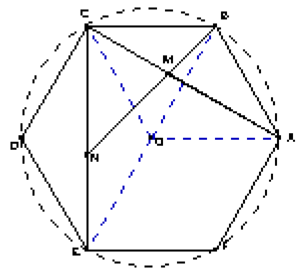
4. 塞瓦定理

5. 分析：过 A 作 BC 的平行线交△ABC 的外接圆于 D，连结 BD。则 CD=DA=AB，AC=BD。

由托勒密定理，AC • BD=AD • BC+CD • AB。

评注：托勒密定理



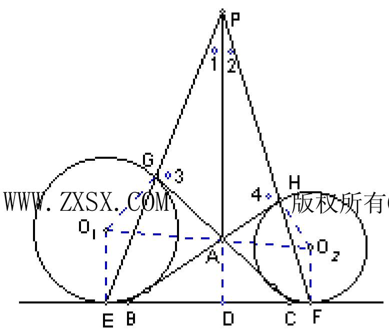


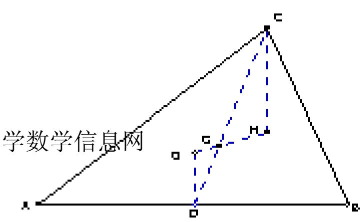
6. 评注：托勒密定理

7. 评注：西姆松定理（西姆松线）

8. 评注：面积法

9. 评注：面积法



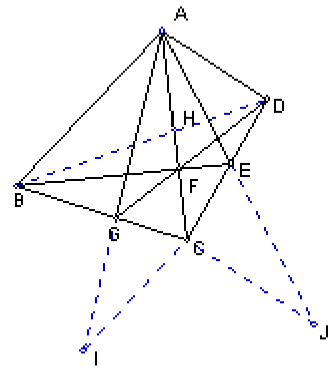


10. 评注：同一法

11. 证明：连结 BD 交 AC 于 H。对△BCD 用塞瓦定理，可得 $\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BH}{HD}\cdot\frac{DE}{EC}=1$

因为 AH 是∠BAD 的角平分线，由角平分线定理，

可得 $\frac{BH}{HD}=\frac{AB}{AD}$，故 $\frac{CG}{GB}\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{DE}{EC}=1$。



过 C 作 AB 的平行线交 AG 的延长线于 I，过 C 作 AD 的平行线交 AE 的延长线于 J。

则 $\frac{CG}{GB}=\frac{CI}{AB},\frac{DE}{EC}=\frac{AD}{CJ}$，

所以 $\frac{CI}{AB}\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AD}{CJ}=1$，从而 CI=CJ。

又因为 CI//AB，CJ//AD，故∠ACI=π－∠BAC=π－∠DAC=∠ACJ。

因此，△ACI≌△ACJ，从而∠IAC=∠JAC，即∠GAC=∠EAC。

§22 几何变换

一、 平移变换

1. 定义 设$\overrightarrow{PQ}$是一条给定的有向线段，T 是平面上的一个变换，它把平面图形 F 上任一点 X变到 X'，使得 $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{PQ}$，则 T 叫做沿有向线段 $\overrightarrow{PQ}$的平移变换。记为 $X\xrightarrow{T(\dot{PQ})}X'$，图形 $F\xrightarrow{T(\dot{PQ})}F'$ 。

2. 主要性质 在平移变换下，对应线段平行且相等，直线变为直线，三角形变为三角形，圆变为圆。两对应点连线段与给定的有向线段平行（共线）且相等。

二、 轴对称变换

1. 定义 设 l是一条给定的直线，S是平面上的一个变换，它把平面图形 F 上任一点 X变到 X'，使得 X与 X'关于直线 l对称，则 S叫做以 l为对称轴的轴对称变换。记为 $X\xrightarrow{S(l)}X'$，图形 $F\xrightarrow{S(l)}F'$ 。

2. 主要性质 在轴对称变换下，对应线段相等，对应直线（段）或者平行，或者交于对称轴，且这两条直线的夹角被对称轴平分。

三、 旋转变换

1. 定义 设α是一个定角，O 是一个定点，R 是平面上的一个变换，它把点 O 仍变到 O（不动点），而把平面图形 F 上任一点 X变到 X'，使得 $OX'=OX$，且$\angle XOX'=\alpha$，则R叫做绕中心 O，旋转角为α的旋转变换。记为 $X\xrightarrow{R(O,\alpha)}X'$，图形 $F\xrightarrow{R(O,\alpha)}F'$ 。

其中$\alpha<0$时，表示$\angle XOX'$的始边 OX到终边 OX'的旋转方向为顺时针方向；$\alpha>0$时，为逆时针方向。

2. 主要性质 在旋转变换下，对应线段相等，对应直线的夹角等于旋转角。

四、 位似变换

1． 定义 设 O 是一个定点，H 是平面上的一个变换，它把平面图形 F 上任一点 X 变到 X'，使得 $\overrightarrow{OX'}=k\cdot\overrightarrow{OX}$，则 H 叫做以 O 为位似中心，$k$ 为位似比的位似变换。记为

$X\xrightarrow{H(O,k)}X'$，图形 $F\xrightarrow{H(O,k)}F'$ 。

其中 $k>0$ 时，X' 在射线 OX 上，此时的位似变换叫做外位似；$k<0$ 时，X' 在射线 OX 的反向延长线上，此时的位似变换叫做内位似。

2． 主要性质 在位似变换下，一对位似对应点与位似中心共线；一条线上的点变到一条线上，且保持顺序，即共线点变为共线点，共点线变为共点线；对应线段的比等于位似比的绝对值，对应图形面积的比等于位似比的平方；不经过位似中心的对应线段平行，即一直线变为与它平行的直线；任何两条直线的平行、相交位置关系保持不变；圆变为圆，且两圆心为对应点；两对应圆相切时切点为位似中心。

例题讲解

1．P 是平行四边形 $ABCD$ 内一点，且 $\angle PAB=\angle PCB$。

求证：$\angle PBA=\angle PDA$

2．“风平三角形”中，$AA'=BB'=CC'=2,\angle AOB'=\angle BOC'=60^\circ$，求证：$S_{\Delta AOB'}+S_{\Delta BOC'}+S_{\Delta COA'}<\sqrt{3}$

3．在两条对角线长度以及夹角一定的所有凸四边形中，试求周长最小的四边形。

4.P圆o的弦AB的中点，过P点引圆o的两弦CD、EF，连接DE交AB于M，连接CF交AB于N；求证：$MP = NP$。

5：圆o是给定锐角$\angle ACB$内一个定圆，试在圆o及射线CA、CB上各求一点P、Q、R，使得ΔPQR的周长最小；

6.ΔABC中，$\angle A \geq 90°$，$AD \perp BC$于D，ΔPQR是它的任一内接三角形，
求证：$PQ + QR + RP > 2AD$

7.以ΔABC的边AB、AC为斜边分别向外作等腰直角三角形APB、AQC，M是BC的中点，求证：$MP = MQ$，$MP \perp MQ$;

8.已知O是ΔABC内一点，$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$, P是ΔABC内任意一点，
求证：$PA + PB + PC \geq OA + OB + OC$;($O$为费马点)

9.圆O与ΔABC的三边BC、CA、AB分别交于点A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2，过上述六个点分别作所在边的垂线a_1、a_2、b_1、b_2、c_1、c_2，设a_1、b_2、c_1三线交于一点D，
求证：a_2、b_1、c_2三线也相交于一点；

10.AD是ΔABC的外接圆O的直径，过D作圆O的切线交BC于P，连接并延长PO分别交AB、AC于M、N，求证：$OM=ON$

例题答案

【例 1】P 是平行四边形 $ABCD$ 内一点，且 $\angle PAB=\angle PCB$ 。

求证：$\angle PBA=\angle PDA$

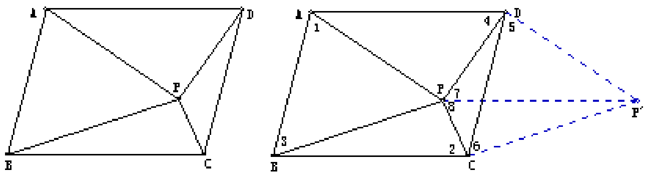


图 1

【分析】作变换$\Delta ABP \xrightarrow{T(\vec{AD})} \Delta DCP$

则$\Delta ABP \cong \Delta DCP, \angle 1=\angle 5, \angle 3=\angle 6$;由$PP'=AD=BC$, $ADPP'$、$PP'CB$都是平行四边形，

知$\angle 2=\angle 8, \angle 4=\angle 7$;由已知$\angle 1=\angle 2$,得$\angle 5=\angle 8$;

$\therefore P$、D、P'、C四点共圆。故∠6═∠7，即∠3═∠4

【例 2】“风平三角形”中，$AA'=BB'=CC'=2, \angle AOB'=\angle BOC'=60°$

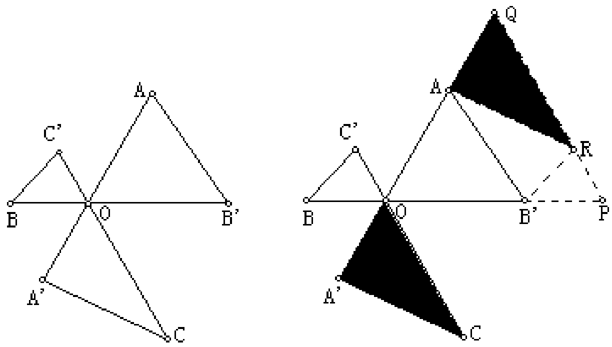


图 2

求证：$S_{\Delta AOB'}+S_{\Delta BOC'}+S_{\Delta COA'}<\sqrt{3}$

【分析】作变换$\Delta A'OC \xrightarrow{T(\overrightarrow{A'A})} \Delta AQR', \Delta BOC' \xrightarrow{T(\overrightarrow{BB'})} \Delta B'PR''$，则$R'$和$R''$重合，记为$R=R'=R''$;$\because P$、$R$、$Q$共线，$O$、$A$、$Q$共线，$O$、$B'$、$P$共线，$\Delta OPQ$为等边三角形

$$S_{\Delta AOB'}+S_{\Delta BOC'}+S_{\Delta COA'}<\sqrt{3}$$

【例 3】在两条对角线长度以及夹角一定的所有凸四边形中，试求周长最小的四边形。

【分析】取AC、BD的中点E、F，令$AC \xrightarrow{T(EF)} A'C'$，则$A'BC'D$是一个符合条件的平行四边形；延长$AF$、$CC'$交于$G$；

$\because E$是AC的中点且$EF \parallel CC'$，$FC \parallel EC'$，$\therefore F$、C'分别为AG、CG的中点；

$\therefore AD + BC = BG + BC \geq 2BC' = A'D + BC'$

同理可得$AB + DC \geq A'B + DC'$

故当四边形为平行四边形时，周长最小

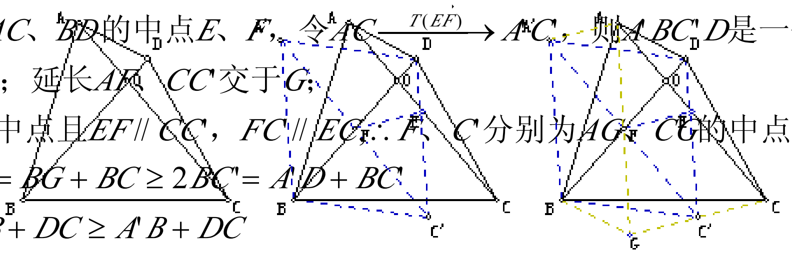


图 3

【评注】当已知条件分散，尤其是相等的条件分散，而又不容易找出证明途径，或题目中有平行条件时，将图形的某一部分施行平移变换，常常十分凑效。

【例4】P圆o的弦AB的中点，过P点引圆o的两弦CD、EF，连接DE交AB于M，连接CF交AB于N；求证：$MP = NP$。

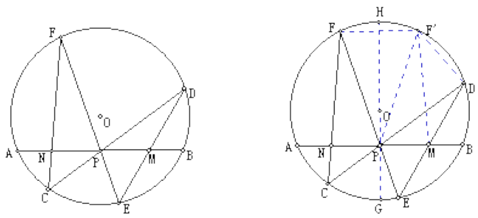


图 4

【分析】设GH为过P的直径，$F \xrightarrow{S(GH)} F'$，显然$F' \in$圆o；又$\because P \in GH, \therefore PF' = PF$

$\because PF \xrightarrow{S(GH)} PF'$，$PA \xrightarrow{S(GH)} PB, \therefore \angle FPN = \angle F'PM$，$PF = PF'$

又$\because FF' \perp GH, AB \perp GH, \therefore FF' \parallel AB$；

$\therefore \angle F'PM + \angle MDF' = \angle FPN + \angle EDF' = \angle EFF' + \angle EDF' = 180°$

$\therefore P$、M、D、F'四点共圆

$\therefore \angle PF'M = \angle PDE = \angle PEN \therefore \Delta PFN \cong \Delta PF'M \Rightarrow PN = PM$

【评注】一般结论为：已知半径R的圆o内一弦AB上的一点P，过P作两条相交弦CD、EF，连接CF、ED交AB于M、N，已知$OP = r$，P到AB中点的距离为a,则

$$\left|\frac{1}{PM} - \frac{1}{PN}\right| = \frac{2a}{R^2 - r^2}$$，(解析法证明：利用二次曲线系知识)

【例5】圆o是给定锐角$\angle ACB$内一个定圆，试在圆o及射线CA、CB上各求一点P、Q、R，使得ΔPQR的周长最小；

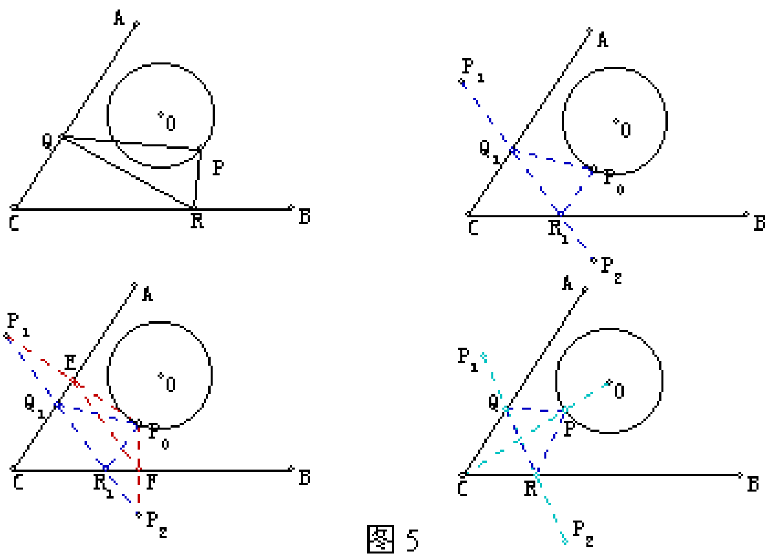


图 5

【分析】在圆o上任取一点P_0
Q_1、R_1，显然$\Delta P_0Q_1R_1$是在取
设P_0P_1交CA于E，P_0P_2交CB
$\because E$、C、F、P_0四点共圆，
$\therefore$当CP_0取最小值时，EF为
连接OC，交圆周于P，令P
则P、Q、R为所求的三角形

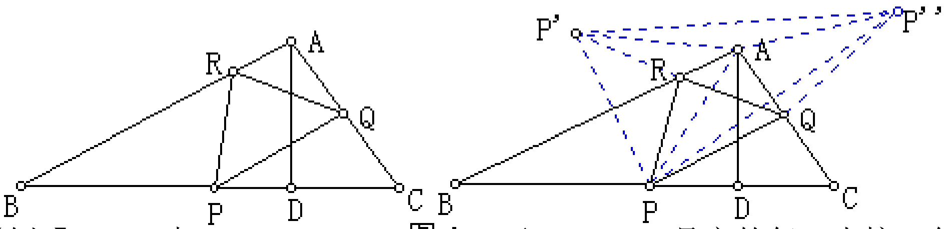


图6

【例6】ΔABC中，$\angle A \geq 90°$，$AD \perp BC$于D，ΔPQR是它的任一内接三角形，求证：$PQ + QR + RP > 2AD$

【分析】设$P \xrightarrow{S(AB)} P'$, $P \xrightarrow{S(AC)} P''$, 则$RP = RP'$, $PQ = P''Q$, $AP = AP' = AP''$

$\therefore PQ + QR + RP = P''Q + QR + RP'$

又$\because \angle A \geq 90°$, $\therefore \angle P'AP + \angle P''AP = 2\angle A \geq 180°$, A点在线段$P'P''$上或在凸四边形$P'RQP''$的内部；$\therefore P''Q + QR + RP' > AP' + AP'' = 2AP > 2AD$

$\therefore PQ + QR + RP > 2AD$

【评注】如果题设中有角平分线、垂线，或图形是等腰三角形、圆等轴对称图形，可以将图形或其部分进行轴对称变换。此外，也可以适当选择对称轴将一些线段的位置变更，以便于比较它们之间的大小。

【例7】以ΔABC的边AB、AC为斜边分别向外作等腰直角三角形APB、AQC，M是BC的中点，求证：$MP = MQ$，$MP \perp MQ$;

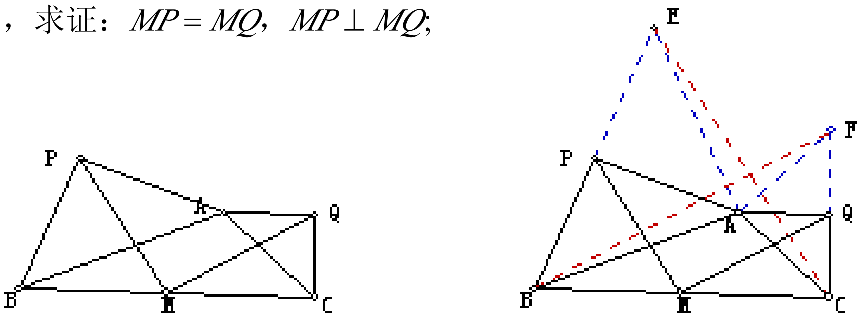


图 7

【分析】延长BP到E，使$PE=BP$，延长CQ到F，使$QF=CQ$，
则ΔBAE、ΔCAF都是等腰三角形，
显然：$E\xrightarrow{R(A,90^\circ)}B, C\xrightarrow{R(A,90^\circ)}F, \therefore EC=BF, EC\perp BF$;
而$PM\,//\,\frac{1}{2}EC, MQ\,//\,\frac{1}{2}BF, \therefore MP=MQ$且$MP\perp MQ$;

【例8】已知O是ΔABC内一点，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^\circ$, P是ΔABC内任意一点，求证：$PA+PB+PC\geq OA+OB+OC$;(O为费马点)

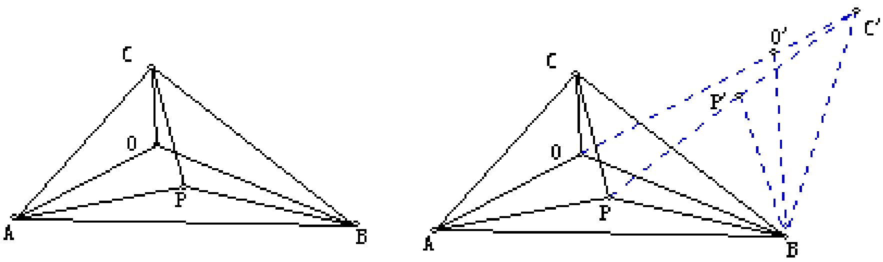


图 8

【分析】将$C\xrightarrow{R(B,-60^\circ)}C', O\xrightarrow{R(B,-60^\circ)}O', P\xrightarrow{R(B,-60^\circ)}P'$,连接$OO'$、$PP'$；
则$\Delta BOO'$、$\Delta BPP'$都是正三角形
$\therefore OO'=OB$，$PP'=PB$，
显然$\Delta BO'C'\cong\Delta BOC$，$\Delta BP'C'\cong\Delta BPC$
由于$\angle BO'C'=\angle BOC=120^\circ=180^\circ-\angle BO'O$;
$\therefore A$、O、O'、C'四点共线，
$\therefore AP+PP'+P'C'\geq AC'=AO+OO'+O'C'$
即：$PA+PB+PC\geq OA+OB+OC$

【例9】圆O与ΔABC的三边BC、CA、AB分别交于点A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2，过上述六个点分别作所在边的垂线a_1、a_2、b_1、b_2、c_1、c_2，设a_1、b_2、c_1三线交于一点D，求证：a_2、b_1、c_2三线也相交于一点；

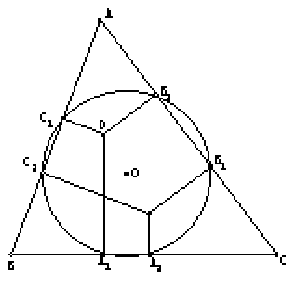
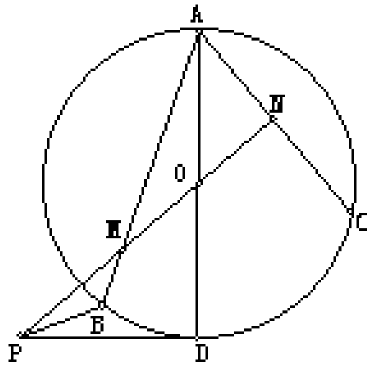


图 9

【分析】$\because a_1$、a_2关于圆心O成中心对称，$\therefore a_1\xrightarrow{R(O,180^\circ)}a_2$
同理：$b_1\xrightarrow{R(O,180^\circ)}b_2$，$c_1\xrightarrow{R(O,180^\circ)}c_2$
$\therefore a_1$、b_2、c_1的公共点D在变换$R(0,180^\circ)$下的像D'也是像a_2、b_1、c_2的公共点
$\therefore a_2$、b_1、c_2三线也相交于一点

【例10】AD是ΔABC的外接圆O的直径，过D作圆O的切线交BC于P，连接并延长PO分别交AB、AC于M、N，求证：$OM=ON$



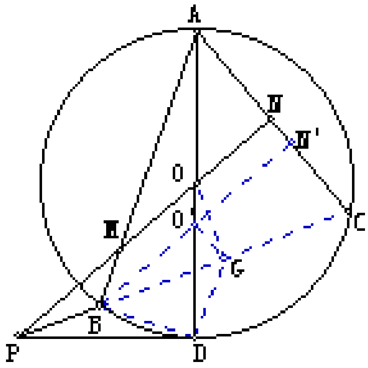


图 10

【分析】设 $O\xrightarrow{H(A、\frac{AB}{AM})}O', N\xrightarrow{\quad AM\quad}N'$, 而 $M\xrightarrow{H(A、\frac{AB}{AM})}B$,

$\because M$、O、N三点共线，$\therefore B$、O'、N'三点共线，且 $\frac{O'B}{OM}=\frac{O'N'}{ON}$

取BC中点G，连接OG、$O'G$、DG、DB

$\because \angle OGP=\angle ODP=90°, \therefore P$、$D$、$G$、$O$四点共圆

$\therefore \angle ODG=\angle OPG$，而由$MN // BN'$有$\angle OPG=\angle O'BG$

$\therefore \angle ODG=\angle O'BG, \therefore O'$、$B$、$D$、$F$四点共圆

$\therefore \angle O'GB=\angle O'DB$；而$\angle O'DB=\angle ACB, \therefore \angle O'GB=\angle ACB, O'G // AC$

而G是BC的中点，$\therefore O'$是BN'的中点，$O'B=O'N'$

$\therefore OM=ON$

§23 抽屉原理

在数学问题中有一类与“存在性”有关的问题，例如：“13 个人中至少有两个人出生在相同月份”；“某校 400 名学生中，一定存在两名学生，他们在同一天过生日”；“2003 个人任意分成 200 个小组，一定存在一组，其成员数不少于 11”；“把[0，1]内的全部有理数放到 100 个集合中，一定存在一个集合，它里面有无限多个有理数”。这类存在性问题中，“存在”的含义是“至少有一个”。在解决这类问题时，只要求指明存在，一般并不需要指出哪一个，也不需要确定通过什么方式把这个存在的东西找出来。这类问题相对来说涉及到的运算较少，依据的理论也不复杂，我们把这些理论称之为“抽屉原理”。

“抽屉原理”最先是由19世纪的德国数学家迪里赫莱（Dirichlet）运用于解决数学问题的,所以又称“迪里赫莱原理”,也有称“鸽巢原理”的。这个原理可以简单地叙述为“把10个苹果，任意分放在9个抽屉里，则至少有一个抽屉里含有两个或两个以上的苹果”。这个道理是非常明显的，但应用它却可以解决许多有趣的问题，并且常常得到一些令人惊异的结果。抽屉原理是国际国内各级各类数学竞赛中的重要内容，本讲就来学习它的有关知识及其应用。

（一） 抽屉原理的基本形式

定理1、如果把n+1个元素分成n个集合，那么不管怎么分，都存在一个集合，其中至少有两个元素。

证明：（用反证法）若不存在至少有两个元素的集合，则每个集合至多1个元素，从而n个集合至多有n个元素，此与共有n+1个元素矛盾，故命题成立。

在定理1的叙述中，可以把“元素”改为“物件”，把“集合”改成“抽屉”，抽屉原理正是由此得名。

同样，可以把“元素”改成“鸽子”，把“分成n个集合”改成“飞进n个鸽笼中”。“鸽笼原理”由此得名。

例题讲解

1. 已知在边长为1的等边三角形内（包括边界）有任意五个点（图1）。证明：至少有两个点之间的距离不大于$\frac{1}{2}$

2．从1-100的自然数中，任意取出51个数，证明其中一定有两个数，它们中的一个是另一个的整数倍。

3．从前25个自然数中任意取出7个数，证明：取出的数中一定有两个数，这两个数中大数不超过小数的1.5倍。

4．已给一个由10个互不相等的两位十进制正整数组成的集合。求证：这个集合必有两个无公共元素的子集合，各子集合中各数之和相等。

5．在坐标平面上任取五个整点（该点的横纵坐标都取整数），证明：其中一定存在两个整点，它们的连线中点仍是整点。

6．在任意给出的 100 个整数中，都可以找出若干个数来（可以是一个数），它们的和可被 100 整除。

7.　17 名科学家中每两名科学家都和其他科学家通信，在他们通信时，只讨论三个题目，而且任意两名科学家通信时只讨论一个题目，证明：其中至少有三名科学家，他们相互通信时讨论的是同一个题目。

课后练习

1．幼儿园买来了不少白兔、熊猫、长颈鹿塑料玩具，每个小朋友任意选择两件，那么不管怎样挑选，在任意七个小朋友中总有两个彼此选的玩具都相同，试说明道理.

2．正方体各面上涂上红色或蓝色的油漆（每面只涂一种色），证明正方体一定有三个面颜色相同.

3．把 1 到 10 的自然数摆成一个圆圈，证明一定存在在个相邻的数，它们的和数大于 17.

4．有红袜 2 双，白袜 3 双，黑袜 4 双，黄袜 5 双，蓝袜 6 双（每双袜子包装在一起）若取出 9 双，证明其中必有黑袜或黄袜 2 双.

5．在边长为 1 的正方形内，任意给定 13 个点，试证：其中必有 4 个点，以此 4 点为顶点的四边开面积不超过 $\frac{1}{4}$（假定四点在一直线上构成面积为零的四边形）.

6．在一条笔直的马路旁种树，从起点起，每隔一米种一棵树，如果把三块“爱护树木”的小牌分别挂在三棵树上，那么不管怎样挂，至少有两棵挂牌的树之间的距离是偶数（以米为单位），这是为什么？

课后练习答案

1.解 从三种玩具中挑选两件，搭配方式只能是下面六种：

（兔、兔），（兔、熊猫），（兔、长颈鹿），（熊猫、熊猫），（熊猫、长颈鹿），（长颈鹿、长颈鹿）

把每种搭配方式看作一个抽屉，把 7 个小朋友看作物体，那么根据原则 1，至少有两个物体要放进同一个抽屉里，也就是说，至少两人挑选玩具采用同一搭配方式，选的玩具相同.

原则 2 如果把 $mn+k(k\geqslant1)$ 个物体放进 n 个抽屉，则至少有一个抽屉至多放进 $m+1$ 个物体．证明同原则相仿．若每个抽屉至多放进 m 个物体，那么 n 个抽屉至多放进 mn 个物体，与题设不符，故不可能．

原则 1 可看作原则 2 的物例（m=1）

2.证明把两种颜色当作两个抽屉，把正方体六个面当作物体，那么 $6=2\times2+2$，根据原则二，至少有三个面涂上相同的颜色．

3.证明 如图 12-1，设 a_1，a_2，a_3，…，a_9，a_{10} 分别代表不超过 10 的十个自然数，它们围成一个圈，三个相邻的数的组成是（a_1，a_2，a_3），（a_2，a_3，a_4），（a_3，a_4，a_5），…，（a_9，a_{10}，a_1），（a_{10}，a_1，a_2）共十组．现把它们看作十个抽屉，每个抽屉的物体数是 $a_1+a_2+a_3$，$a_2+a_3+a_4$，$a_3+a_4+a_5$，…$a_9+a_{10}+a_1$，$a_{10}+a_1+a_2$，由于

$$(a_1+a_2+a_3)+(a_2+a_3+a_4)+\cdots+(a_9+a_{10}+a_1)+(a_{10}+a_1+a_2)$$

$$=3(a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10})$$

$$=3\times(1+2+\cdots+9+10)$$

$$=3\times\frac{(10+1)\times10}{2}=165$$

$$=16\times10+5.$$

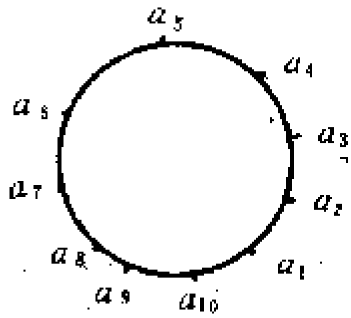


图 12-1

根据原则 2，至少有一个括号内的三数和不少于 17，即至少有三个相邻的数的和不小于 17．

原则 1、原则 2 可归结到期更一般形式：

原则 3 把 $m_1+m_2+\cdots+m_n+k(k\geqslant1)$ 个物体放入 n 个抽屉里，那么或在第一个抽屉里至少放入 m_1+1 个物体，或在第二个抽屉里至少放入 m_2+1 个物体，……，或在第 n 个抽屉里至少放入 m_n+1 个物体．

证明假定第一个抽屉放入物体的数不超过 m_1 个，第二个抽屉放入物体的数不超过 m_2 个，……，第 n 个抽屉放入物体的个数不超过 m_n，那么放入所有抽屉的物体总数不超过 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 个，与题设矛盾．

4.证明 除可能取出红袜、白袜 3 双外．还至少从其它三种颜色的袜子里取出 4 双，根据原理 3，必在黑袜或黄袜、蓝袜里取 2 双．

上面数例论证的似乎都是“存在”、“总有”、“至少有”的问题，不错，这正是抽屉原则的主要作用．需要说明的是，运用抽屉原则只是肯定了“存在”、“总有”、“至少有”，却不能确切地指出哪个抽屉里存在多少．

制造抽屉是运用原则的一大关键

首先要指出的是，对于同一问题，常可依据情况，从不同角度设计抽屉，从而导致不同的制造抽屉的方式.

5.证明如图 12-2 把正方形分成四个相同的小正方形.

因 13=3×4+1，根据原则 2，总有 4 点落在同一个小正方形内（或边界上），以此 4 点为顶点的四边形的面积不超过小正方形的面积，也就不超过整个正方形面积的 $\frac{1}{4}$.

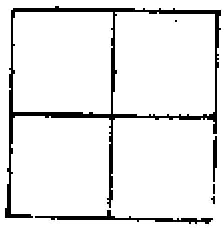


图 12－2

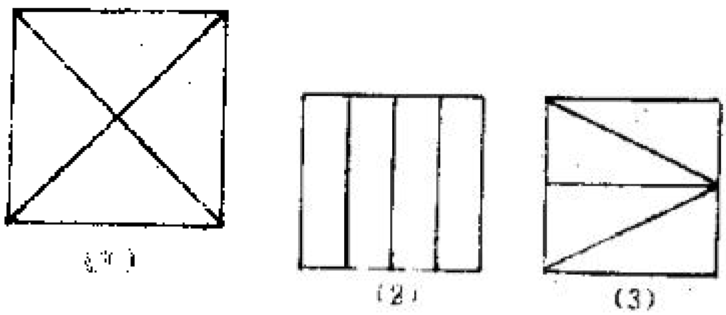


图 12－3

事实上，由于解决问题的核心在于将正方形分割成四个面积相等的部分，所以还可以把正方形按图 12-3（此处无图）所示的形式分割.

合理地制造抽屉必须建立在充分考虑问题自身特点的基础上.

6.解如图 12-4（设挂牌的三棵树依次为 A、B、C.AB=a，BC=b，若 a、b 中有一为偶数，命题得证.否则 a、b 均为奇数，则 AC=a+b 为偶数，命题得证.

下面我们换一个角度考虑：给每棵树上编上号，于是两棵树之间的距离就是号码差，由于树的号码只能为奇数和偶数两类，那么挂牌的三棵树号码至少有两个同为奇数或偶数，它们的差必为偶数，问题得证.

后一证明十分巧妙，通过编号码，将两树间距离转化为号码差.这种转化的思想方法是一种非常重要的数学方法

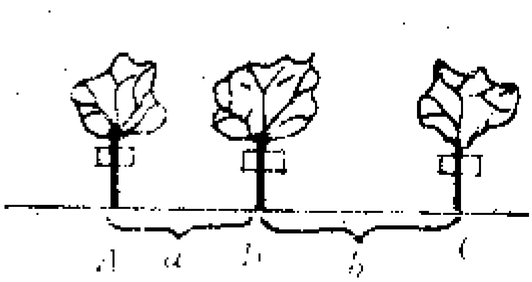
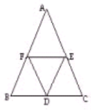


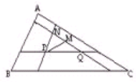
图 12-4

例题答案：

1. 分析：5 个点的分布是任意的。如果要证明“在边长为 1 的等边三角形内（包括边界）有 5 个点，那么这 5 个点中一定有距离不大于$\frac{1}{2}$的两点”，则顺次连接三角形三边中点，即三角形的三条中位线，可以分原等边三角形为 4 个全等的边长为$\frac{1}{2}$的小等边三角形，则 5 个点中必有 2 点位于同一个小等边三角形中（包括边界），其距离便不大于$\frac{1}{2}$。

以上结论要由定理“三角形内（包括边界）任意两点间的距离不大于其最大边长”来保证，下面我们就来证明这个定理。





如图 2，设 BC 是△ABC 的最大边，P，M 是△ABC 内（包括边界）任意两点，连接 PM，过 P 分别作 AB、BC 边的平行线，过 M 作 AC 边的平行线，设各平行线交点为 P、Q、N，那么

∠PQN=∠C，∠QNP=∠A

因为 BC≥AB，所以∠A≥∠C，则∠QNP≥∠PQN，而∠QMP≥∠QNP≥∠PQN（三角形的外角大于不相邻的内角），所以 PQ≥PM。显然 BC≥PQ，故 BC≥PM。

由此我们可以推知，边长为$\frac{1}{2}$的等边三角形内（包括边界）两点间的距离不大于$\frac{1}{2}$。

说明：

（1）这里是用等分三角形的方法来构造“抽屉”。类似地，还可以利用等分线段、等分正方形的方法来构造“抽屉”。例如“任取 n+1 个正数 a_i，满足 0＜a_i≤1（i=1,2,…,n+1），试证明：

这 n+1 个数中必存在两个数，其差的绝对值小于$\frac{1}{n}$”。又如：“在边长为 1 的正方形内任意放置五

个点，求证：其中必有两点，这两点之间的距离不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

（2）例 1 中，如果把条件（包括边界）去掉，则结论可以修改为：至少有两个点之间的距离小于$\frac{1}{2}$”，请读者试证之，并比较证明的差别。

（3）用同样的方法可证明以下结论：

i）在边长为 1 的等边三角形中有 n^2+1 个点，这 n^2+1 个点中一定有距离不大于$\frac{1}{2}$的两点。

ii）在边长为 1 的等边三角形内有 n^2+1 个点，这 n^2+1 个点中一定有距离小于$\frac{1}{2}$的两点。

（4）将（3）中两个命题中的等边三角形换成正方形，相应的结论中的$\frac{1}{n}$换成$\frac{\sqrt{2}}{n}$，命题仍然成立。

（5）读者还可以考虑相反的问题：一般地，“至少需要多少个点，才能够使得边长为 1 的正三角形内（包括边界）有两点其距离不超过$\frac{1}{n}$”。

2．分析：本题似乎茫无头绪，从何入手？其关键何在？其实就在“两个数”，其中一个是另一个的整数倍。我们要构造“抽屉”，使得每个抽屉里任取两个数，都有一个是另一个的整数倍，这只有把公比是正整数的整个等比数列都放进去同一个抽屉才行，这里用得到一个自然数分类的基本知识：任何一个正整数都可以表示成一个奇数与 2 的方幂的积，即若 m∈N+,K∈N+，n∈N,则 $m=(2k-1)\cdot 2^n$，并且这种表示方式是唯一的，如 1=1×2°，2=1×21，3=3×2°，……

证明：因为任何一个正整数都能表示成一个奇数乘 2 的方幂，并且这种表示方法是唯一的，所以我们可把 1-100 的正整数分成如下 50 个抽屉（因为 1-100 中共有 50 个奇数）：

（1）{1，1×2，1×2^2，1×2^3，1×2^4，1×2^5，1×2^6}；

（2）{3，3×2，3×2^2，3×2^3，3×2^4，3×2^5}；

（3）{5，5×2，5×2^2，5×2^3，5×2^4}；

（4）{7，7×2，7×2^2，7×2^3}；

（5）{9，9×2，9×2^2，9×2^3}；

（6）{11，11×2，11×2^2，11×2^3}；

……

（25）{49，49×2}；

（26）{51}；

……

（50）{99}。

这样，1-100 的正整数就无重复，无遗漏地放进这 50 个抽屉内了。从这 100 个数中任取 51 个数，也即从这 50 个抽屉内任取 51 个数，根据抽屉原则，其中必定至少有两个数属于同一个抽屉，即属于（1）-（25）号中的某一个抽屉，显然，在这 25 个抽屉中的任何同一个抽屉内的两个数中，一个是另一个的整数倍。

说明：

（1）从上面的证明中可以看出，本题能够推广到一般情形：从 1-2n 的自然数中，任意取出n+1 个数，则其中必有两个数，它们中的一个是另一个的整数倍。想一想，为什么？因为 1-2n 中共含 1，3，…，2n-1 这 n 个奇数，因此可以制造 n 个抽屉，而 n+1＞n，由抽屉原则，结论就是必然的了。给 n 以具体值，就可以构造出不同的题目。例 2 中的 n 取值是 50，还可以编制相反的题目，如：“从前 30 个自然数中最少要（不看这些数而以任意方式地）取出几个数，才能保证取出的数中能找到两个数，其中较大的数是较小的数的倍数？”

（2）如下两个问题的结论都是否定的（n 均为正整数）想一想，为什么？

①从 2，3，4，…，2n+1 中任取 n+1 个数，是否必有两个数，它们中的一个是另一个的整数倍？

②从 1，2，3，…，2n+1 中任取 n+1 个数，是否必有两个数，它们中的一个是另一个的整数倍？

你能举出反例，证明上述两个问题的结论都是否定的吗？

（3）如果将（2）中两个问题中任取的 n+1 个数增加 1 个，都改成任取 n+2 个数，则它们的结论是肯定的还是否定的？你能判断证明吗？

3．证明：把前 25 个自然数分成下面 6 组：

1； ①
2，3； ②
4，5，6； ③
7，8，9，10； ④
11，12，13，14，15，16； ⑤
17，18，19，20，21，22，23， ⑥

因为从前 25 个自然数中任意取出 7 个数，所以至少有两个数取自上面第②组到第⑥组中的某同一组，这两个数中大数就不超过小数的 1.5 倍。

说明：

（1）本题可以改变叙述如下：在前 25 个自然数中任意取出 7 个数，求证其中存在两个数，它们相互的比值在$[\frac{2}{3},\frac{3}{2}]$内。

显然，必须找出一种能把前 25 个自然数分成 6（7-1=6）个集合的方法，不过分类时有一个限制条件：同一集合中任两个数的比值在$[\frac{2}{3},\frac{3}{2}]$内，故同一集合中元素的数值差不得过大。这样，我们可以用如上一种特殊的分类法：递推分类法：

从 1 开始，显然 1 只能单独作为 1 个集合{1}；否则不满足限制条件。

能与 2 同属于一个集合的数只有 3，于是{2，3}为一集合。

如此依次递推下去，使若干个连续的自然数属于同一集合，其中最大的数不超过最小的数的$\frac{3}{2}$倍，就可以得到满足条件的六个集合。

（2）如果我们按照（1）中的递推方法依次造“抽屉”，则第 7 个抽屉为

{26，27，28，29，30，31，32，33，34，35，36，37，38，39}；

第 8 个抽屉为：{40，41，42，…，60}；

第 9 个抽屉为：{61，62，63，…，90，91}；

……

那么我们可以将例 3 改造为如下一系列题目：

（1）从前 16 个自然数中任取 6 个自然数；

（2）从前 39 个自然数中任取 8 个自然数；

（3）从前 60 个自然数中任取 9 个自然数；

（4）从前 91 个自然数中任取 10 个自然数；…

都可以得到同一个结论：其中存在 2 个数，它们相互的比值在$[\frac{2}{3},\frac{3}{2}]$内。

上述第（4）个命题，就是前苏联基辅第 49 届数学竞赛试题。如果我们改变区间$[\frac{q}{p},\frac{p}{q}]$（p＞q）端点的值，则又可以构造出一系列的新题目来。

4.分析与解答：一个有着 10 个元素的集合，它共有多少个可能的子集呢？由于在组成一个子集的时候，每一个元素都有被取过来或者不被取过来两种可能，因此，10 个元素的集合就有 2^{10}=1024 个不同的构造子集的方法，也就是，它一共有 1024 个不同的子集，包括空集和全集在内。空集与全集显然不是考虑的对象，所以剩下 1024-2=1022 个非空真子集。

再来看各个真子集中一切数字之和。用 N 来记这个和数，很明显：

10≤N≤91+92+93+94+95+96+97+98+99=855

这表明 N 至多只有 855-9=846 种不同的情况。由于非空真子集的个数是 1022，1022＞846，所以一定存在两个子集 A 与 B，

使得 A 中各数之和=B 中各数之和。

若 A∩B=φ，则命题得证，若 A∩B=C≠φ，即 A 与 B 有公共元素，这时只要剔除 A 与 B 中的一切公有元素，得出两个不相交的子集 A_1 与 B_1，很显然

A_1 中各元素之和=B_1 中各元素之和，因此 A_1 与 B_1 就是符合题目要求的子集。

说明：本例能否推广为如下命题：

已给一个由 m 个互不相等的 n 位十进制正整数组成的集合。求证：这个集合必有两个无公共元素的子集合，各子集合中各数之和相等。

请读者自己来研究这个问题。

5．分析与解答：由中点坐标公式知，坐标平面两点（x_1,y_1）、（x_2,y_2）的中点坐标是$(\frac{x_1+x_2}{2}),\frac{y_1+y_2}{2})$。欲使$\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}$都是整数，必须而且只须 x_1 与 x_2，y_1 与 y_2 的奇偶性相同。坐标平面上的任意整点按照横纵两个坐标的奇偶性考虑有且只有如下四种：（奇数、奇数），（偶数，偶数），（奇数，偶数），（偶数，奇数）以此构造四个“抽屉”，则在坐标平面上任取五个整点，那么至少有两个整点，属于同一个“抽屉”因此它们连线的中点就必是整点。

说明：我们可以把整点的概念推广：如果（$x_1,x_2,\cdots x_n$）是 n 维（元）有序数组，且 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 中的每一个数都是整数，则称（$x_1,x_2,\cdots x_n$）是一个 n 维整点（整点又称格点）。如果对所有的 n 维整点按每一个 x_i 的奇偶性来分类，由于每一个位置上有奇、偶两种可能性，因此共可分为 2×2×…×2=2^n 个类。这是对 n 维整点的一种分类方法。当 n=3 时，2^3=8，此时可以构造命题：“任意给定空间中九个整点，求证它们之中必有两点存在，使连接这两点的直线段的内部含有整点”。这就是 1971 年的美国普特南数学竞赛题。在 n=2 的情形，也可以构造如下的命题：“平面上任意给定 5 个整点”，对“它们连线段中点为整点”的 4 个命题中，为真命题的是：

（A）最少可为 0 个，最多只能是 5 个 （B）最少可为 0 个，最多可取 10 个

（C）最少为 1 个，最多为 5 个 （D）最少为 1 个，最多为 10 个

（正确答案（D））

6．分析：本题也似乎是茫无头绪，无从下手，其关键何在？仔细审题，它们的“和”能“被 100 整除”应是做文章的地方。如果把这 100 个数排成一个数列，用 S_m 记其前 m 项的和，则其可构造 S_1，S_2，…S_{100} 共 100 个"和"数。讨论这些“和数”被 100 除所得的余数。注意到 S_1，S_2，…S_{100} 共有 100 个数，一个数被 100 除所得的余数有 0，1，2，…99 共 100 种可能性。“苹果”数与“抽屉”数一样多，如何排除“故障”？

证明：设已知的整数为 $a_1, a_2, \cdots a_{100}$ 考察数列 $a_1, a_2, \cdots a_{100}$ 的前 n 项和构成的数列 $S_1, S_2, \cdots S_{100}$。

如果 S_1，S_2，…S_{100} 中有某个数可被 100 整除，则命题得证。否则，即 S_1，S_2，…S_{100} 均不能被 100 整除，这样，它们被 100 除后余数必是{1, 2, …, 99}中的元素。由抽屉原理 I 知，$S_1, S_2, \cdots S_{100}$ 中必有两个数，它们被 100 除后具有相同的余数。不妨设这两个数为 S_i，S_j（i＜j），则 100｜（S_j-S_i），即 100｜$(a_{i+1}+a_{i+2}+\Lambda+a_{j-1}+a_j)$。命题得证。

说明：有时候直接对所给对象作某种划分，是很难构造出恰当的抽屉的。这时候，我们需要对所给对象先作一些变换，然后对变换得到的对象进行分类，就可以构造出恰当的抽屉。本题直接对 $\{a_n\}$ 进行分类是很难奏效的。但由 $\{a_n\}$ 构造出 $\{S_n\}$ 后，再对 $\{S_n\}$ 进行分类就容易得多。

另外，对 $\{S_n\}$ 按模 100 的剩余类划分时，只能分成 100 个集合，而 $\{S_n\}$ 只有 100 项，似乎不能应用抽屉原则。但注意到余数为 0 的类恰使结论成立，于是通过分别情况讨论后，就可去掉余数为 0 的类，从而转化为 100 个数分配在剩下的 99 个类中。这种处理问题的方法应当学会，它会助你从“山穷水尽疑无路”时，走入“柳暗花明又一村”中。

最后，本例的结论及证明可以推广到一般情形（而且有加强的环节）：

在任意给定的 n 个整数中，都可以找出若干个数来（可以是一个数），它们的和可被 n 整除，而且，在任意给定的排定顺序的 n 个整数中，都可以找出若干个连续的项（可以是一项），它们的和可被 n 整除。

将以上一般结论中的 n 赋以相应的年份的值如 1999，2000，2001…，就可以编出相应年份的试题来。如果再赋以特殊背景，则可以编出非常有趣的数学智力题来，如下题：

有 100 只猴子在吃花生，每只猴子至少吃了 1 粒花生，多者不限。请你证明：一定有若干只猴子（可以是一只），它们所吃的花生的粒数总和恰好是 100 的倍数。

7．证明：视17 个科学家为 17 个点，每两个点之间连一条线表示这两个科学家在讨论同一个问题，若讨论第一个问题则在相应两点连红线，若讨论第 2 个问题则在相应两点连条黄线，若讨论第 3 个问题则在相应两点连条蓝线。三名科学家研究同一个问题就转化为找到一个三边同颜色的三角形。

考虑科学家 A，他要与另外的 16 位科学家每人通信讨论一个问题，相应于从 A 出发引出 16 条线段，将它们染成 3 种颜色，而 16=3×5+1，因而必有 6=5+1 条同色，不妨记为 AB_1，AB_2，AB_3，AB_4，AB_5，AB_6 同红色，若 B_i（i=1，2，…，6）之间有红线，则出现红色三角线，命题已成立；否则 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，B_6 之间的连线只染有黄蓝两色。

考虑从 B_1 引出的 5 条线，B_1B_2，B_1B_3，B_1B_4，B_1B_5，B_1B_6，用两种颜色染色，因为 5=2×2+1，故必有 3=2+1 条线段同色，假设为黄色，并记它们为 B_1B_2，B_1B_3，B_1B_4。这时若 B_2，B_3，B_4 之间有黄线，则有黄色三角形，命题也成立，若 B_2，B_3，B_4，之间无黄线，则△B_2，B_3，B_4，必为蓝色三角形，命题仍然成立。

说明：（1）本题源于一个古典问题--世界上任意 6 个人中必有 3 人互相认识，或互相不认识。（美国普特南数学竞赛题）。

（2）将互相认识用红色表示，将互相不认识用蓝色表示，（1）将化为一个染色问题，成为一个图论问题：空间六个点，任何三点不共线，四点不共面，每两点之间连线都涂上红色或蓝色。求证：存在三点，它们所成的三角形三边同色。

（3）问题（2）可以往两个方向推广：其一是颜色的种数，其二是点数。

本例便是方向一的进展，其证明已知上述。如果继续沿此方向前进，可有下题：

在 66 个科学家中，每个科学家都和其他科学家通信，在他们的通信中仅仅讨论四个题目，而任何两个科学家之间仅仅讨论一个题目。证明至少有三个科学家，他们互相之间讨论同一个题目。

（4）回顾上面证明过程，对于 17 点染 3 色问题可归结为 6 点染 2 色问题，又可归结为 3 点染一色问题。反过来，我们可以继续推广。从以上（3，1）→（6，2）→（17，3）的过程，易发现

6=（3-1）×2+2，17=（6-1）×3+2，66=（17-1）×4+2，

同理可得（66-1）×5+2=327，（327-1）×6+2=1958…记为 $r_1=3$，$r_2=6$，$r_3=17$，$r_4=66$，$r_5=327$，$r_6=1958$，…

我们可以得到递推关系式：$r_n=n(r_{n-1}-1)+2$，n=2,3,4…这样就可以构造出 327 点染 5 色问题，1958 点染 6 色问题，都必出现一个同色三角形。

§24 容斥原理

相对补集：称属于 A 而不属于 B 的全体元素，组成的集合为 B 对 A 的相对补集或差集，记作 A-B。

容斥原理：以 $|A|$ 表示集合 A 中元素的数目，我们有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} Ai\right| := \sum_{i=1}^{n}|Ai| - \sum_{i<j}|Ai \cap A_j| + \sum_{i<j<k}|Ai \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$，其

中 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 n 个集合 $|A|$ 称为 A 的阶。

n 阶集合的全部子集数目为 2^n。

例题讲解

1．对集合{1，2，…，n}及其每一个非空了集，定义一个唯一确定的“交替和”如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后交替地减或加后继的数所得的结果，例如，集合 $\{1,2,4,6,9\}$ 的“交替和”是 9-6+4-2+1=6. $\{5,6\}$ 的“交替和”是 6-5=1，$\{2\}$ 的交替和是 2。那么，对于 n=7。求所有子集的“交替和”的总和。

2．某班对数学、物理、化学三科总评成绩统计如下：优秀的人数：数学 21 个，物理 19 个，化学 20 个，数学物理都优秀 9 人，物理化学都优秀 7 人。化学数学都优秀 8 人。这个班有 5 人任何一科都不优秀。那么确定这个班人数以及仅有一科优秀的三科分别有多少个人。

3．计算不超过 120 的合数的个数

4．1992 位科学家，每人至少与 1329 人合作过，那么，其中一定有四位数学家两两合作过。

5．把 2^n 个元素的集合分为若干个两两不交的子集，按照下述规则将某一个子集中某些元素挪到另一个子集：从前一子集挪到后一子集的元素个数等于后一子集的元素个数（前一子集的元素个

数应不小于后一子集的元素个数），证明：可以经过有限次挪动，使得到的子集与原集合相重合。

6．给定 1978 个集合，每个集合都含有 40 个元素，已知其中任意两个集合都恰有一个公共元，证明：存在一个元素，它属于全部集合。

7．在 n 个元素组成的集合中取 $n+1$ 个不同的三元子集。证明：其中必有两个，它们恰有一个公共元。

课后练习

1．一个集合含有 10 个互不相同的十进制两位数，证明：这个集合必有两个无公共元素的子集合，这两个子集元素和相等。

2．是否存在两个以非页整数为元素的集合 A、B，使得任一个非负整数都可以被 A、B 之中各取一数之和唯一表出。

3．对每个$n\in N$求,最大$k\in N$使得在 n 元集合中，可以取出 k 个子集，其中任意两个的交非合。

4．能否把$\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$分成两个积相等的不交集合。

课后练习答案

1．我们可以发现对每个数k，它出现在2^{99}个子集之中，因此所有子集中的k的和为$k\cdot 2^{99}$，那么全部元素在全部子集之中的和为$\sum_{k=1}^{100}(k\cdot 2^{99})=5050\cdot 2^{99}$。

2．利用二进制来考虑此题，小明的前 9 包分别有钱 1 分（2），10 分（2），100 分（2），1000 分（2），10000 分（2），100000 分（2），1000000 分（2），10000000 分（2），100000000 分

（2），剩下一包装剩下的钱（以上数皆为二进制）就可以了。

3．不能。反证法。设存在合乎题中条件的一种分法，如果 m 和 k 同属于一个子集，则记为 $m\sim k$，否则记为 $m\Delta k$，对 $\forall n\in Z$，若 (a,b,c) 分在三个集合中则称 (a,b,c) 为好的。

$(n-50,n,n+1987),(n-100,n-50,n+1937),(n+1937,n+1987,n+2\times1987)$ 都是好的。

$n\Delta n-50$，$n\Delta n+1987$，而 $n+1937\,\Delta n-50$　$n+1937\,\Delta n+1987$，故 $n\sim n+1937$

在第二组中用 n 代替 $n+1937$，故 $(n-100,n-50,n)$ 是好的。故 $n\sim n-150$。

由此 $0\sim 1937\sim\cdots\sim 50\cdot 1937=646\cdot 150-50\sim\cdots\sim -50$ 即 $0\sim 50$，但 $0\Delta 50$。矛盾！

有这样一个结论 n 阶集合的子集 $A_1,\cdots,A_{1k}$ 若满足 $A_i\not\subset A_j$ 且 $A_j\not\subset A_i$ 则 m 的最大值为 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$，代入本题得为 C_{10}^5。

例题答案：

1．分析；n=7 时，集合{7，6，5，4，3，2，1}的非空子集有 2^7-1 个，虽然子集数目有限，但是逐一计算各自的“交替和”再相加，计算量仍然巨大，但是，根据“交替和”的定义，容易看到集合{1，2，3，4，5，6，7}与{1，2，3，4，5，6}的“交替和”是 7；可以想到把一个不含 7 的集和 A 与 $A\bigcup\{7\}$ 的“交替和”之和应为 7。那么，我们也就很容易解决这个问题了。

解：集合{1，2，3，4，5，6，7}的子集中，除去{7}外还有2^7-2个非空子集合，把这

2^7-2个非空子集两两结组后分别计算每一组中“交替和”之和，结组原则是设

$A_i=\{7,a_1,a_2,\ldots\},A_i^1=A_i-\{7\}$这是把$A_i$与$A_i^1$结合为一组，显然，每组中，“交替和”之和应

为 7，共有$(2^7-2)/2$组.所以,所有“交替和”之和应该为$7\times(2^7-2)/2+7=448$。

说明：我们在这道题的证明过程中用了这类题目最典型的解法。就是“对应”的方法，“对应”的方法在解决相等的问题中应用得更多。

2．分析：自然地设 A={数学总评优秀的人}

B={物理总评优秀的人}

C={化学总评优秀的人}

则已知|A|=21 |B|=19 |C|=20

$$|A\cap B|=9,|B\cap C|=7,|C\cap A|=8$$

$$\text{因为}|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$$

$$\text{所以}|A\cup B\cup C|-|A\cap B\cap C|=36$$

$$\text{而}|A\cap B\cap C|<\min\{|A\cap B|,|B\cap C|,|C\cap A|\}=7$$

$$\text{所以}36\le|A\cup B\cup C|\le 43,\ \text{所以}41\le|I|\le 48$$

这表明全班人数在 41 至 48 人之间。

仅数学优秀的人数是

$$|A\cap\overline{B\cup C}|=|A\cup B\cup C|-|B\cup C|$$
$$=|A\cup B\cup C|-|B|-|C|+|B\cap C|=|A\cup B\cup C|-32$$

可见仅数学优秀的人数在 4 至 11 人之间。

同理仅物理优秀的人数在 3 至 10 人之间。

同理仅化学优秀的人数在 5 至 12 人之间。

解：（略）。

说明：先将具体的实际生活中的问题数学化，然后根据数学理论来解决这个问题不仅是竞赛中常见情况，也是在未来学习中数学真正有用的地方。

3．分析 1：用“筛法”找出不超过 120 的质数(素数)，计算它们的个数，从 120 中去掉质数，再去掉“1”，剩下的即是合数。

解法 1：120 以内：

① 既不是素数又不是合数的数有一个，即“1”；

② 素数有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97、101、103、107、109、113、共 30 个。所以不超过 120 的合数有 120－1－30＝89(个)(附：筛法：从小到大按顺序写出 1－120 的所有自然数：

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~

先划掉 1，保留 2，然后划掉 2 的所有倍数 4,6，…120 等；保留 3，再划掉所有3 的倍数 6,9…117、120 等；保留 5，再划掉 5 的所有倍数 10,15，…120；保留 7，再划掉 7 的所有倍数，…这样，上面数表中剩下的数就是 120 以内的所有素数，这种方法是最古老的寻找素数的方法，叫做“埃斯托拉‘筛法’”)

说明：当 n 不很大时，计算 1－n 中的合数的个数困难不大；但当 n 很大时，利用筛法就很困难、很费时了，必须另觅他途。

[分析 2]受解法 1 的启发，如果能找出 1－n 中质数的个数 m，则 n－1－m 就是不超过 n 的合数的个数。由初等数论中定理：a 是大于 1 的整数。如果所有不大于 √a 的质数都不能整除 a，那么 a 是质数。因为 $120<121=11^2$，$\sqrt{120}<11$，所以不超过 120 的合数必是 2 或 3 或 5 或 7 的倍数，所以只要分别计算出不超过 120 的 2、3、5、7 的倍数，再利用“容斥原理”即可。

解法 2：设 $S_1=\{a \mid 1\leqslant 3\leqslant 120, 2 \mid a\}$；$S_2=\{b \mid 1\leqslant b\leqslant 120, 3 \mid b\}$；$S_3=\{c \mid 1\leqslant 3\leqslant 120, 5 \mid c\}$；$S_4=\{d \mid 1\leqslant d\leqslant 120, 7 \mid d\}$，则有：

$\mathrm{card}(S_1)=[120/2]=60$，$\mathrm{card}(S_2)=[120/3]=40$，$\mathrm{card}(S_3)=[120/5]=24$，$\mathrm{card}(S_4)=[120/7]=17$；

([n]表示 n 的整数部分，例如[2,4]＝2，…)

$\mathrm{card}(S_1\cap S_2)=[120/2\times 3]=20$，$\mathrm{card}(S_1\cap S_3)=[120/2\times 5]=12$，
$\mathrm{card}(S_1\cap S_4)=[120/2\times 7]=8$，$\mathrm{card}(S_2\cap S_3)=[120/3\times 5]=8$，

card$(S_2 \cap S_4)$＝[120/3×7]＝5，card$(S_3 \cap S_4)$[120/5×7]＝3，
card$(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$[120/2×3×5]＝4，card$(S_1 \cap S_2 \cap S_4)$＝[120/2×3×7]＝2，
card$(S_1 \cap S_3 \cap S_4)$＝[120/2×5×7]＝1，card$(S_2 \cap S_3 \cap S_4)$＝[120/3×5×7]＝1，
card$(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4)$＝[120/2×3×5×7]＝0

∴card$(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4)$＝card$(S_1)$＋card$(S_2)$＋card$(S_3)$＋card$(S_4)$－card$(S_1 \cap S_2)$－card$(S_1 \cap S_3)$－card$(S_1 \cap S_4)$－card$(S_2 \cap S_3)$－card$(S_2 \cap S_4)$－card$(S_3 \cap S_4)$＋card$(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$＋card$(S_1 \cap S_2 \cap S_4)$＋card$(S_1 \cap S_3 \cap S_4)$＋card$(S_2 \cap S_3 \cap S_4)$－card$(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4)$＝(60＋40＋24＋17)-(20+12+8+8+5+3)+(4+2+1+1)-0＝141-56＋8＝93

∵2，3，5，7 是质数

∴93－4＝89

即不超过 120 的合数共有 89 个。

4．**分析：**在与一个人 A 合作的人中我们找到 B。再说明一定有人与 A 和 B 都合作过为 C。最后再说明有人与 A、B、C 都合作过为 D，那么 A、B、C、D 就是找的人了。

证明：一个人 A。不妨设 B 与之合作。那么

$|\tilde{A} \cap \tilde{B}| = |\tilde{A}| + |\tilde{B}| - |\tilde{A} \cup \tilde{B}| \geq 1329 + 1329 - 1992 \geq 1$.所以存在$C \in \tilde{A} \cap \tilde{B}$。即 C 与 A 和 B 均合作过，$\tilde{A}, \tilde{B}$ 分别表示与 A、B 合作过的人的集合。同样地，

$$|\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}| = |\tilde{A}| + |\tilde{B}| + |\tilde{C}| - |\tilde{A} \cup \tilde{B}| - |\tilde{B} \cup \tilde{C}| - |\tilde{C} \cup \tilde{A}| + |\tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C}| \geq 1392 \times 3 - 1992 \times 2 \geq 1$$

。

所以存在$D \in \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}$。则 A、B、C、D 就是所求，证毕。

说明：把一个普通的叙述性问题转化为集合的语言描述的问题通常为解题的关键之处，也是同学们需加强的。

5．分析：首先考虑到2^n是一个很特殊的数，其次我们发现若两个集合的元素个数除以 2 的若干次幂后若为奇数，那么，它们之间挪后就应为偶数这一事实，若还不能想到解答就试一下$n=2$，$n=3$时的情况，相信解答就不会难找到了。

证明：考虑含奇数个元素的子集（如果有这样的子集），因为所有子集所含元素的个数总和是偶数，所以具有奇数个元素的子集个数也是偶数，任意将所有含有奇数个元素的子集配成对，对每对子集按题目要求的规则移动：从较大的子集挪出一些元素，添加到较小的子集，挪出的元素个数为较小子集的元素个数，于是得到的所有子集的元素个数都是偶数，现在考虑元素个数不被 4 整除的子集，如果$n=1$，则总共有两个元素，它们在同一个子集，因此设$n \geq 2$，因为子集

的元素个数的总数被 4 整除，因此这样的子集的个数为偶数，任意将这样的子集配成对，对每一对子集施行满足题目要求的挪动，于是得到的每个子集数均可被 4 整除，依此做下去，最后得到的每个子集元素个数均可被 2^n 整除，也就是只能有一个子集，它的元素个数为 2^n，证毕。

说明：这道题的证明中隐含了一种单一变量在变化时变化方向相同这一性质，就这道题来说，一直在增加的就是各子集元素个数被 2 的多少次幂整除的这个幂次数，这是一大类问题，除了这种变化量，还要经常考虑变化中的不变量。

6．分析：我们可以先去找一个属于很多个集合的元素，最好它就是我们要找的那一个。

证明：考虑给定的 1978 个集合中任意一个集合 A，它和其它 1977 个集合都相交，因此，存在 $a\in A$，使得它至少属于其中 50 个集合，否则，集合 A 中每个元素至多属于 49 个集合，而集合 A 恰有 40 个元素，所以除 A 外至多有 1960 个集合，不可能，因此设 a 属于集合 A_1，$A_2\cdots A_{50}$，下面证明它属于给定的 1978 个集合中任一个。

对于除了 A_1，A_2，… A_{50} 的任一个集合 B，设 $a\notin B$，则 B 与 A，A_1，A_2，… A_{50} 每一个都有至少一个元素的交，它们都与 a 不同，那么，B 就至少要有 51 个元素，不可能，因此 a 属于每个集合。

说明：这种题目最怕把它想难了，想行太难了，就会觉得无从下手，做数学竞赛题就需要一方面在做题之前选好方向，另一方面就是大胆尝试去做。

7．分析：证明恰有一个公共元也许挺难。那么证只有两个或零个公共元不可能是否可行呢？如果具有两个公共元的集合 A 与 B 表示为 $A\sim B$、那么~有传递性。是否有用呢？

证明：设结论不真。则所给的 3 元子集要么不交，要么恰有两个公共元，如果子集 A 与 B 恰有两个公共元，则记 $A\sim B$。设 A B C 是三个子集。可以证明如果 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$，于是所有给定的 3 元子集可以分类，使得同一类中任意两个不同子集都恰有两个公共元。而不同类的子集不相交。于是对每个子集类，有三种可能：（1）恰含 3 个元素的类。（2）恰含4 个元素的类。（3）至少含 5 个元素的类。

在（1）下，3 元子集类恰由一个 3 元子集组成。

在（2）下，子集类中至多有 4 个子集。

考虑（3） 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,d\}$，则还有一个 e，由 $A\sim C$，$B\sim C$，有 $C=\{a,b,e\}$。因此对子集类中任意子集 D，由 $A\sim D$，$B\sim D$，$C\sim D$ 它包含 a 与 b，于是类中子集个数比类中元素个数少 2，于是，每个类中子集个数不超过元素个数，但是题中条件子集数大于元素个数，矛盾！

说明：此题为 1979 年美国竞赛题。题目难度较大，应该说是应用了高等代数中的一些思想。

§25 奇数偶数

将全体整数分为两类，凡是2的倍数的数称为偶数，否则称为奇数.因此，任一偶数可表为$2m$（m∈Z），任一奇数可表为$2m+1$或$2m-1$的形式.奇、偶数具有如下性质：

（1）奇数±奇数=偶数；偶数±偶数=偶数；

奇数±偶数=奇数；偶数×偶数=偶数；

奇数×偶数=偶数；奇数×奇数=奇数；

（2）奇数的平方都可表为$8m+1$形式，偶数的平方都可表为$8m$或$8m+4$的形式（m∈Z）.

（3）任何一个正整数 n，都可以写成 $n=2^m l$ 的形式，其中 m 为非负整数，l 为奇数.

这些性质既简单又明显，然而它却能解决数学竞赛中一些难题.

例题讲解

1．下列每个算式中，最少有一个奇数，一个偶数，那么这 12 个整数中，至少有几个偶数？

□+□=□，□-□=□，□×□＝□，□÷□＝□.

2．已知 n 是偶数，m 是奇数，方程组 $\begin{cases} x-1988y=n \\ 11x+27y=m \end{cases}$ 的解 $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$ 是整数，那么（　　）

（A）p、q 都是偶数.　　（B）p、q 都是奇数.

（C）p 是偶数，q 是奇数　　（D）p 是奇数，q 是偶数

3．在 1，2，3…，1992 前面任意添上一个正号和负号，它们的代数和是奇数还是偶数.

4．70 个数排成一行，除了两头的两个数以外，每个数的 3 倍都恰好等于它两边两个数的和，这一行最左边的几个数是这样的：0，1，3，8，21，….问最右边的一个数被 6 除余几？

5．设 a、b 是自然数，且有关系式

123456789=（11111+a）（11111-b），　　①

证明 a-b 是 4 的倍数．

6．在 3×3 的正方格（a）和（b）中，每格填“+”或“-”的符号，然后每次将表中任一行或一列的各格全部变化试问重复若干次这样的“变号”程序后，能否从一张表变化为另一张表．

+	+	-
+	+	-
-	-	+

a

-	-	+
+	-	-
-	-	+

b

7．设正整数 d 不等于 2，5，13.证明在集合｛2，5，13，d｝中可以找到两个元素 a,b，使得 ab－1 不是完全平方数.

8．设 a、b、c、d 为奇数，$0<a<b<c<d$,并且$ad=bc$，证明：如果 $a+d=2^k$，$b+c=2^m$，k,m 为整数，那么 $a=1$.

9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一组数，它们中的每一个都取 1 或－1，而且 $a_1a_2a_3a_4+a_2a_3a_4a_5+\cdots+a_na_1a_2a_3=0$，证明：n 必须是 4 的倍数.

课后练习

1.填空题

（1）有四个互不相等的自然数，最大数与最小数的差等于 4，最大数与最小数的积是一个奇数，而这四个数的和是最小的两位奇数，那么这四个数的乘积是______.

（2）有五个连续偶数，已知第三个数比第一个数与第五个数和的 $\frac{1}{4}$ 多 18，这五个偶数之和是____.

（3）能否把 1993 部电话中的每一部与其它 5 部电话相连结？答____.

2.选择题

（1）设 a、b 都是整数，下列命题正确的个数是（　）

①若 a+5b 是偶数，则 a-3b 是偶数；②若 a+5b 是偶数，则 a-3b 是奇数；

③若 a+5b 是奇数，则 a-3b 是奇数；④若 a+5b 是奇数，则 a-3b 是偶数.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（2）若 n 是大于 1 的整数，则 $p=n+(n^2-)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$ 的值（　）.

（A）一定是偶数　　（B）必然是非零偶数

（C）是偶数但不是 2　　（D）可以是偶数，也可以是奇数

（3）已知关于 x 的二次三项式 ax^2+bx+c（a、b、c 为整数），如果当 x=0 与 x=1 时，二次三项式的值都是奇数，那么 a（　）

（A）不能确定奇数还是偶数　　（B）必然是非零偶数

（C）必然是奇数　　（D）必然是零

3.试证明 $1^{1986}+9^{1986}+8^{1986}+6^{1986}$ 是一个偶数.

4.请用 0 到 9 十个不同的数字组成一个能被 11 整除的最小十位数.

5.有 n 个整数，共积为 n，和为零，求证：数 n 能被 4 整除

6.在一个凸 n 边形内，任意给出有限个点，在这些点之间以及这些点与凸 n 边形顶点之间，用线段连续起来，要使这些线段互不相交，而且把原凸 n 边形分为只朋角形的小块，试证这种小三我有形的个数与 n 有相同的奇偶性.

7.一个四位数是奇数，它的首位数字泪地其余各位数字，而第二位数字大于其它各位数字，第三位数字等于首末两位数字的和的两倍，求这四位数.

8.试证：3^n+1 能被 2 或 2^2 整除，而不能被 2 的更高次幂整除.

课后练习答案

１．（１）３０．（最小两位奇数是１１，最大数与最小数同为奇数）

（2）180．设第一个偶数为 x，则后面四个衣次为 x＋2， x＋4， x＋6， x＋8．

（3）不能.

2．B．B．A

3．1^{1986}是奇数 1， 9^{1986}的个位数字是奇数 1，而 8^{1986}， 6^{1986}都是偶数，故最后为偶数.

4．仿例 5　1203465879．

5．设 a_1， a_2，…， a_n满足题设即 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$　　①

$a_1 \cdot a_2 \cdots\cdots a_n = n$　②。假如 n 为奇数，由②，所有 a_i皆为奇数，但奇数个奇数之和为奇数，故这时①不成立，可见 n 只能为偶数．由于 n 为偶数，由②知 a_i中必有一个偶数，由①知 a_i中必有另一个偶数．于是 a_i中必有两个偶数，因而由②知 n 必能被 4 整除.

6．设小三角形的个数为 k，则 k 个小三角形共有 3k 条边，减去 n 边形的 n 条边及重复计算的边数扣共有 $\frac{1}{2}$（3k＋n）条线段，显然只有当 k 与 n 有相同的奇偶性时， $\frac{1}{2}$（3k－n）才是整数.

7．设这个四位数是 $\overline{abcd}$ 由于 $1 \leqslant a < d$， d 是奇数所以 $d \geqslant 3$ 于是 $c = 2(a+d) \geqslant 8$，即 c＝8 或 c＝9．因 c 是偶数，所以 c＝8，由此得 a＝1， d＝3．又因 $b > c$，所以 b＝9 因此该数为 1983．

8．当 n 为奇数时，考虑 $(4-1)^n+1$ 的展开式；当 n 为偶数时，考虑 $(2+1)^n+1$ 的展开式.

例题答案：

1. 解 因为加法和减法算式中至少各有一个偶数，乘法和除法算式中至少各有二个偶数，故这 12 个整数中至少有六个偶数.

2. 分析　由于 1988y 是偶数，由第一方程知 p=x=n+1988y，所以 p 是偶数，将其代入第二方程中，于是 11x 也为偶数，从而 27y=m-11x 为奇数，所以是 y=q 奇数，应选（C）

$$= 2\cdot 64^k + 3\cdot 729^k + 15625^k + 1$$
$$= 2\cdot(7\cdot 9+1)^k + 3\cdot(7\cdot 104+1)^k + (7\cdot 2232+1)^k + 1$$
$$= 2\cdot 7\cdot A + 2 + 3\cdot 7\cdot B + 3 + 7\cdot C + 1 + 1$$
$$= (2+3+1+1)(\bmod 7) = 0(\bmod 7)$$

$\therefore$ 对于$\forall k \geq 0$,且$k \in Z$, $2^{6k+1} + 3^{6k+1} + 5^{6k} + 1$都能被 7 整除;

注: $a \equiv 1(\bmod b) \Rightarrow a^k \equiv 1(\bmod b), k \in Z^+$

3. 分析　因为两个整数之和与这两个整数之差的奇偶性相同，所以在题设数字前面都添上正号和负号不改变其奇偶性，而1+2+3+…+1992=$\frac{1992(1992+1)}{2}$=996×1993 为偶数　于是题设的代数和应为偶数.

4. 解　设 70 个数依次为 a_1, a_2, a_3 据题意有

a_1=0,　　偶

a_2=1　　奇

$a_3=3a_2-a_1$,　　奇

$a_4=3a_3-a2$,　　偶

$a_5=3a_4-a3$,　　奇

$a_6=3a_5-a4$,　　奇

………………

由此可知:
当 n 被 3 除余 1 时，a_n是偶数;

当 n 被 3 除余 0 时，或余 2 时，a_n是奇数，显然 a_{70}是 3k+1 型偶数，所以 k 必须是奇数，令 k=2n+1，则 a_{70}=3k+1=3(2n+1)+1=6n+4.

5. 证明　由①式可知

11111（a-b）=ab+4×617　　②

∵a＞0, b＞0, ∴a-b＞0

首先，易知 a-b 是偶数，否则 11111(a-b)是奇数，从而知 ab 是奇数，进而知 a、b 都是奇数，可知(11111+a)及(11111-b)都为偶数，这与式①矛盾

其次，从 a-b 是偶数，根据②可知 ab 是偶数，进而易知 a、b 皆为偶数，从而 ab+4×617 是 4 的倍数，由②知 a-b 是 4 的倍数.

6. 解　按题设程序，这是不可能做到的，考察下面填法：
在黑板所示的 2×2 的正方形表格中，按题设程序“变号”，“+”号或者不变，或者变成两个.

表(a)中小正方形有四个“+”号，实施变号步骤后，“+”的个数仍是偶数；但表(b)中小正方形“+”号的个数仍是奇数，故它不能从一个变化到另一个.

显然，小正方形互变无法实现，3×3 的大正方形的互变，更无法实现.

7. 解 由于 $2\times5-1=3^2$，$2\times13-1=5^2$，$5\times13-1=8^2$，因此，只需证明 $2d-1$，$5d-1$，$13d-1$ 中至少有一个不是完全平方数.

用反证法，假设它们都是完全平方数，令

$2d-1=x^2$　　①

$5d-1=y^2$　　②

$13d-1=z^2$　　③

$x,y,z\in N^*$

由①知，x 是奇数，设 $x=2k-1$，于是 $2d-1=(2k-1)^2$，即 $d=2k^2-2k+1$，这说明 d 也是奇数.因此，再由②，③知，y,z 均是偶数.

设 $y=2m,z=2n$,代入③、④，相减，除以 4 得，$2d=n^2-m^2=(n+m)(n-m)$，从而 n^2-m^2 为偶数，n，m 必同是偶数，于是 m+n 与 m－n 都是偶数，这样 $2d$ 就是 4 的倍数，即 d 为偶数，这与上述 d 为奇数矛盾.故命题得证.

8.首先易证：$2^k>2^m$.从而 $k>m$(因为 $d-a>b-c$,于是 $(a+d)^2=(a-d)^2+4ad$

$>(b-c)^2+4bc=(b+c)^2$.再由 $ad=bc,d=2^k-a,c=2^m-b$ 可得 $b\cdot2^m-a\cdot2^k=b^2-a^2$,

因而 $2^m(b-a\cdot2^{k-m})=(b+a)(b-a)$　　①

显然，$b+a,b-a$ 为偶数，$b-2^{k-m}a$ 为奇数，并且 $b+a$ 和 $b-a$ 只能一个为 4n 型偶数，一个为 4n+2 型偶数（否则它们的差应为 4 的倍数，然而它们的差等于 $2a$ 不是 4 的倍数），

因此,如果设 $b-2^{k-m}a=e\cdot f$，其中 e,f 为奇数，那么由①式及 $b+a,b-a$ 的特性就有

（Ⅰ）$\begin{cases}b+a=2^{m-1}e,\\ b-a=2f.\end{cases}$ 或（Ⅱ）$\begin{cases}b+a=2f,\\ b-a=2^{m-1}e.\end{cases}$

由 $ef=b-2^{k-m}a\le b-2a<b-a\le 2f$　得 e=1，
从而 $f=b-2^{k-m}a$.于是（Ⅰ）或（Ⅱ）分别变为

$\begin{cases} b+a=2^{m-1}, \\ b-a=2(b-2^{k-m}a) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b+a=2(b-2^{k-m}a), \\ b-a=2^{m-1} \end{cases}$

解之，得 $a\cdot 2^{k-m+1}=2^{m-1}$.因 a 为奇数，故只能 a=1.

9.**证明**:由于每个 a_i均为 1 和－1，从而题中所给的等式中每一项 $a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}$ 也只取 1 或－1，而这样的 n 项之和等于 0，则取 1 或－1 的个数必相等，因而 n 必须是偶数，设 n=2m.

再进一步考察已知等式左端 n 项之乘积=$(a_1a_2\cdots a_n)^4$=1，这说明，这 n 项中取－1 的项（共 m 项）也一定是偶数，即 m=2k，从而 n 是 4 的倍数.

§26 整除

整除是整数的一个重要内容，这里仅介绍其中的几个方面：整数的整除性、最大公约数、最小公倍数、方幂问题.

Ⅰ. 整数的整除性

初等数论的基本研究对象是自然数集合及整数集合．我们知道，整数集合中可以作加、减、乘法运算，并且这些运算满足一些规律（即加法和乘法的结合律和交换律，加法与乘法的分配律），但一般不能做除法，即，如 a,b 是整除，$b\neq 0$，则 $\dfrac{a}{b}$ 不一定是整数. 由此引出初等数论中第一个基本概念：整数的整除性.

定义一：（带余除法）对于任一整数 a 和任一整数 b，必有惟一的一对整数 q，r 使得

$a=bq+r$，$0\le r<b$，并且整数 q 和 r 由上述条件惟一确定，则 q 称为 b 除 a 的不完全商，r 称为 b 除 a 的余数.

若 $r=0$，则称 b 整除 a，或 a 被 b 整除，或称 a 是 b 的倍数，或称 b 是 a 的约数（又叫因子），记为 $b\mid a$.否则，$b\nmid a$.

任何 a 的非 $\pm a,\pm 1$ 的约数，叫做 a 的真约数.

0 是任何整数的倍数，1 是任何整数的约数.

任一非零的整数是其本身的约数，也是其本身的倍数.

由整除的定义，不难得出整除的如下性质：

（1）若 $a\mid b, b\mid c$, 则 $a\mid c$.

（2）若 $a\mid b_i$, 则 $a\mid \sum_{i=1}^{n} c_i b_i$, 其中 $c_i\in Z, i=1,2,\cdots,n$.

（3）若 $a\mid c$，则 $ab\mid cb$.反之，亦成立.

（4）若 $a\mid b$, 则 $|a|\le|b|$.因此，若 $a\mid b$, 又 $b\mid a$, 则 $a=\pm b$.

（5）a、b 互质，若 $a\mid c, b\mid c$, 则 $ab\mid c$.

（6）p 为质数，若 $p\mid a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$, 则 p 必能整除 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的某一个.

特别地，若 p 为质数，$p\mid a^n$, 则 $p\mid a$.

（7）如在等式 $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{k=1}^{m} b_k$ 中除开某一项外，其余各项都是 c 的倍数，则这一项也是 c 的倍数.

（8）n 个连续整数中有且只有一个是 n 的倍数.

（9）任何 n 个连续整数之积一定是 n 的倍数.

本讲开始在整除的定义同时给出了约数的概念，又由上一讲的算术基本定理，我们就可以讨论整数的约数的个数了.

Ⅱ. 最大公约数和最小公倍数

定义二：设 a、b 是两个不全为 0 的整数.若整数 c 满足：$c\mid a, c\mid b$，则称 c 为 a,b 的公约数，a 与 b 的所有公约数中的最大者称为 a 与 b 的最大公约数，记为 (a,b).如果 (a,b)=1，则称 a 与 b 互质或互素.

定义三：如果 d 是 a、b 的倍数，则称 d 是 a、b 的公倍数. a 与 b 的公倍数中最小的正数称

为a与b的最小公倍数，记为$[a,b]$.

最大公约数和最小公倍数的概念可以推广到有限多个整数的情形，并用$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$表示$a_1,a_2,\cdots,a_n$的最大公约数，$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$表示$a_1,a_2,\cdots,a_n$的最小公倍数.

若$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，则称$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$互质，若$a_1,a_2,\cdots,a_n$中任何两个都互质，则称它们是两两互质的.注意，n个整数互质与n个整数两两互质是不同的概念，前者成立时后者不一定成立（例如，3，15，8 互质，但不两两互质）；显然后者成立时，前者必成立.

因为任何正数都不是 0 的倍数，所以在讨论最小公倍数时，一般都假定这些整数不为 0.同时，由于a,b与$|a|,|b|$有相同的公约数，且$(a,b)=(|a|,|b|)$（有限多个亦成立），因此，我们总限于在自然数集合内来讨论数的最大公约数和最小公倍数.

III.方幂问题

一个正整数n能否表成m个整数的k次方和的问题称为方幂和问题.特别地，当$m=1$时称为k次方问题，当$k=2$时，称为平方和问题.

能表为某整数的平方的数称为完全平方数.简称平方数，关于平方数，明显有如下一些简单的性质和结论：

（1）平方数的个位数字只可能是 0，1，4，5，6，9.

（2）偶数的平方数是 4 的倍数，奇数的平方数被 8 除余 1，即任何平方数被 4 除的余数只能是 0 或 1.

（3）奇数平方的十位数字是偶数.

（4）十位数字是奇数的平方数的个位数一定是 6.

（5）不能被 3 整除的数的平方被 3 除余 1，能被 3 整除的数的平方能被 3 整除.因而，平方数被 9 除的余数为 0，1，4，7，且此平方数的各位数字的和被 9 除的余数也只能为 0，1，4，7.

（6）平方数的约数的个数为奇数.

（7）任何四个连续整数的乘积加 1，必定是一个平方数.

例题讲解

1．证明：对于任何自然数n和k，数$f(n,k)=2n^{3k}+4n^k+10$都不能分解成若干个连续的正整数之积.

2．设p和q均为自然数,使得

$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$.证明：$p$可被 1979 整除.

3．对于整数n与k，定义$F(n,k)=\sum_{r=1}^{n} r^{2k-1}$,求证：$F(n,1)$可整除$F(n,k)$.

4．求一对整数a,b，满足：(1) $ab(a+b)$不能被 7 整除；（2）$(a+b)^7-a^7-b^7$能被7^7整除.

5．求设a和b是两个正整数，$(a,b)=1,p$为大于或等于 3 的质数，

$c=(a+b,\dfrac{a^p+b^p}{a+b}$），试证：（1）$(c,a)=1$；（2）$c=1$或$c=p.$

6. m盒子中各若干个球，每一次在其中$n(n<m)$个盒中加一球.求证：不论开始的分布情况如何，总可按上述方法进行有限次加球后使各盒中球数相等的充要条件是$(m,n)=1$.

7．求所有这样的自然数n，使得$2^8+2^{11}+2^n$是一个自然数的平方.

课后练习

1．　选择题

（1）若数 n=20·30·40·50·60·70·80·90·100·110·120·130，则不是 n 的因数的最小质数是（　）.

（A）19　（B）17　（C）13　（D）非上述答案

（2）在整数 0、1、2…、8、9 中质数有 x 个，偶数有 y 个，完全平方数有 z 个，则 x+y+z 等于（　）.

（A）14　（B）13　（C）12　（D）11　（E）10

（3）可除尽 $3^{11}+5^{18}$ 的最小整数是（　）.

（A）2 （B）3 （C）5 （D）$3^{11}+5^{18}$（E）以上都不是

2. 填空题

（1）把 100000 表示为两个整数的乘积，使其中没有一个是 10 的整倍数的表达式为__________.

(2)一个自然数与 3 的和是 5 的倍数,与 3 的差是 6 的倍数,这样的自然数中最小的是_________.

(3)在十进制中,各位数码是 0 或 1,并且能被 225 整除的最小自然数是________.

3.求使 $\sqrt{2000a}$ 为整数的最小自然数 a 的值.

4.证明:对一切整数 n,$n^2+2n+12$ 不是 121 的倍数.

5.设 $\overline{abcd}$ 是一个四位正整数,已知三位正整数 $\overline{abc}$ 与 246 的和是一位正整数 d 的 111 倍,$\overline{abc}$ 又是 18 的倍数.求出这个四位数 $\overline{abcd}$,并写出推理运算过程.

6.能否有正整数 m、n 满足方程 $m^2+1954=n^2$.

7.证明：（1）$133|(11^{n+2}+12^{n+1})$，其中 n 为非负整数.

(2)若将(1)中的 11 改为任意一个正整数 a,则(1)中的 12,133 将作何改动?证明改动后的结论.

8.设 a、b、c 是三个互不相等的正整数.求证:在 a^3b-ab^3, b^3c-bc^3, c^3a-ca^3 三个数中,至少有一个能被 10 整除.

9. 100 个正整数之和为 101101,则它们的最大公约数的最大可能值是多少?证明你的结论.

课后练习答案

1．B．B．A

2．（1）$2^5\cdot 5^5$．（2）27．

3．由 2000a 为一整数平方可推出 a=5.

4．反证法．若是121的倍数，设$n^2+2n+12=121k \Rightarrow (n+1)^2=11(11k-1)$．∵11是素数且除尽$(+1)^2$，

∴11除尽$n+1 \Rightarrow 11^2$除尽$(n+1)^2$或$11 \mid 11k-1$，不可能．

5．由$\overline{abc}+246$是d的111倍，$\Rightarrow \overline{abc}$可能是198，309，420，531，642，753；又$\overline{abc}$是18的倍数，∴$\overline{abc}$只能是198．而198＋246＝444，

∴d＝4，$\overline{abcd}$是1984．

7．（1）$11^{n+2}+12^{2n+1}=121\times 11^n+12\times 144^n=121\times 11^n+12\times 11^n-12\times 11^n+12\times 144^n=\cdots=133\times 11^n+12\times(144^n-11^n)$．第一项可被133整除．又$144-11 \mid 144^n-11^n$，∴$133 \mid 11^{n+2}+12^{2n+1}$.

（2）11改为a．12改为a＋1，133改为a（a＋1）＋1．改动后命题为$a(a+1)+1 \mid a^{n+2}+(a+1)^{2n+1}$，可仿上证明．

8．∵$a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2)$；同理有$b(b^2-c^2)$；$ca(c^2-a^2)$.若a

、b、c中有偶数或均为奇数，以上三数总能被2整除．又∵在a、b、c中若有一个是5的倍数，则题中结论必成立．若均不能被5整除，则a^2，b^2，c^2个位数只能是1，4，6，9，从而a^2-b^2，b^2-c^2，c^2-a^2的个位数是从1，4，6，9中，任取三个两两之差，其中必有0或±5，故题中三式表示的数至少有一个被5整除，又2、5互质．

9．设100个正整数为a_1，a_2，…，a_{100}，最大公约数为d，并令

$$a_i = d\cdot a_i' (1\le i\le 100).$$

则$a_1+a_2+\ldots+a_{100}=d(a_1'+a_2'+\ldots+a'_{100})=101101=101\times1001$，故知$a_1'$，$a_2'$，$a'_{100}$不可能都是1，从而$a'_1+a'_2+\ldots+a'_{100}\ge 1\times 99+2=101$，$d\le 1001$；若取$a_1=a_2=a_{99}=1001$，$a_{100}=2002$，则满足$a_1+a_2+\ldots+a_{100}=1001\times 101=101101$，且$d=1001$，故d的最大可能值为1001

例题答案：

1. 证明：由性质9知，只需证明数$f(n,k)$不能被一个很小的自然数n整除.因

$f(n,k)=3n^{3k}+3n^k-n^{3k}+n^k+10=3(n^{3k}+n^k+3)-n^k(n^k-1)(n^k+1)+1,$

$3\mid 3(n^{3k}+n^k+3),3\mid n^k(n^k-1)(n^k+1),3\nmid 1$，故$3\nmid f(n,k)$，因而$f(n,k)$不能分解成三个或三个以上的连续自然数的积.

再证$f(n,k)$不能分解成两个连续正整数的积.

由上知，$f(n,k)=3q+1(q\in N)$，因而只需证方程：$3q+1=x(x+1)$无正整数解.而这一点可分别具体验算$x=3r,34+1,34+2$时，$x(x+1)$均不是$3q+1$形的数来说明.

故$f(n,k)$对任何正整数n、k都不能分解成若干个连续正整数之积.

2. 证明：$\frac{p}{q}=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{1319})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318})$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659})$$
$$=(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319})+(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318})+\cdots+(\frac{1}{989}+\frac{1}{990})$$
$$=1979\times(\frac{1}{660\times1319}+\frac{1}{661\times1318}+\cdots+\frac{1}{989\times990})$$

两端同乘以 1319！得$1319!\times\frac{p}{q}=1979\times m(m\in N^*)$. 此式说明 1979|1319！× p.由于 1979 为质数，且 1979 $\nmid$ 1319！，故 1979| p.

【评述】把 1979 换成形如$3k+2$的质数，1319 换成$2k+1(k\in N^*)$，命题仍成立.

牛顿二项式定理和$(a-b)\mid a^n-b^n,(a+b)\mid a^n-b^n$($n$为偶数)，$(a+b)\mid a^n-b^n$($n$为奇数)在整除问题中经常用到.

3.证明：当$n=2m$时，$F(2m,1)=\sum_{r=1}^{2m}r=m(2m+1),$

$$F(2m,k)=\sum_{r=1}^{m}r^{2k-1}+\sum_{r=m+1}^{2m}r^{2k-1}$$
$$=\sum_{r=1}^{m}r^{2k-1}+\sum_{r=1}^{m}(2m+1-r)^{2k-1}$$
$$=\sum_{r=1}^{m}[r^{2k-1}+(2m+1-r)^{2k-1}],$$

由于[⋯]能被 $r+(2m+1-r)=2m+1$ 整除，所以 $F(2m,k)$ 能被 $2m+1$ 整除，另一方面，

$$F(2m,k)=\sum_{r=1}^{m-1}[r^{2k-1}+(2m-r)^{2k-1}]+m^{2k-1}+(2m)^{2k-1},$$

上式中[⋯]能被 $r+(2m-r)=2m$ 整除，所以 $F(2m,k)$ 也能被 m 整除.因 m 与 $2m+1$ 互质，所以 $F(2m,k)$ 能被 m（$2m+1$）（即 $F(m,1)$）整除.

类似可证当 $n=2m+1$ 时，F（$2m+1$，k）能被 F（$2m+1,1$）整除.故 $F(n,k)$ 能被 $F(n,1)$ 整除.

4. $(a+b)^7-a^7-b^7=7ab[(a^5+b^5)+3ab(a^3+b^3)+5a^2b^2(a+b)]$

$$=7ab(a+b)(a^2+b^2+ab)^2.$$

根据题设要求(1)(2)知，$7^6\mid(a^2+b^2+ab)^2$，即 $7^3\mid a^2+b^2+ab.$

令 $a^2+b^2+ab=7^3$，即 $(a+b)^2-ab=343$，即 $a+b=19$，则 $ab=19^2-343$. 故可令 $a=18,b=1$ 即合要求.

5. 由已知得 $a+b=ct,\dfrac{a^p+b^p}{a+b}=cs(t,s\in N)$，两式相乘得

$c^2st=a^p+b^p=a^p+(ct-a)^p=c^pt^p-pac^{p-1}t^{p-1}+\cdots+pa^{p-1}ct,$ 于是

$cs=c^{p-1}t^{p-1}-pac^{p-2}t^{p-2}+\cdots+pa^{p-1}$，故 $c\mid pa^{p-1}$.

（1）现用反证法来证明 $(c,a)=1$. 若 $(c,a)=k>1$，令 q 是 k 的一个质因子，则有 $q\mid c,q\mid a$.因 $c\mid a+b$，则 $q\mid a+b$，从而 $q\mid b$.于是 q 是 a、b 的一个公约数，这与 $(a,b)=1$ 矛盾，故 $(c,a)=1$.

（2）因为 $c\mid pa^{p-1},(c,a)=1$，所以 $c\mid p$.而 p 为质数且 $p\geq 3$，故 $c=1$ 或 $c=p$.

6. 证明：设 $(m,n)=1$，则有 $u,v\in Z$ 使得 $un=vm+1=v(m-1)+(v+1)$，此式说明：对盒子连续加球 u 次，可使 $m-1$ 个盒子各增加了 v 个，一个增加 $(v+1)$ 个.这样可将多增加了一个球的盒子选择为原来球数最少的那个，于是经过 u 次加球之后，原来球数最多的盒子中的球与球数最少的盒子中的球数之差减少 1，因此，经过有限次加球后，各盒球数差为 0，达到各盒中的球数相

等.

用反证法证明必要性.若 $(m,n)=d>1$，则只要在 m 个盒中放 $m+1$ 个球，则不管加球多少次，例如，加球 k 次，则这时 m 个盒中共有球 $m+1+kn$（个），因为 $d\mid m, d\mid n, d>1,$ 所以 $m+1+kn$ 不可能是 d 的倍数，更不是 m 的倍数，各盒中的球决不能一样多，因此，必须 $(m,n)=1$.

7. 证明：（1）当 $n\le 8$ 时，$N=2^8+2^{11}+2^n\cdot(2^{8-n}+2^{11-n}+1)$，因（…）为奇数，所以要使N为平方数，$n$ 必为偶数.逐一验证 $n=2,4,6,8$ 知，N 都不是平方数.

（2）当 $n=9$ 时，$N=2^8+2^{11}+2^9=2^8\times 11$ 不是平方数.

（3）当 $n\ge 10$ 时，$N=2^8(9+2^{n-8})$，要 N 为平方数，$9+2^{n-8}$ 应为奇数的平方，不妨假设 $9+2^{n-8}=(2k+1)^2$,则 $2^{n-10}=(k-1)\times(k+2)$. 由于 $k-1$ 和 $k+2$ 是一奇一偶，左边为 2 的幂，因而只能 $k-1$=1，于是得 $k=2$，由 $2^{n-10}=2^2$ 知 $n=12$ 为所求.

§27 同余

1．设 m 是一个给定的正整数，如果两个整数 a 与 b 用 m 除所得的余数相同，则称 a 与 b 对模同余，记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$，否则，就说 a 与 b 对模 m 不同余，记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$，显然，

$a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow a=km+b,(k\in Z)\Leftrightarrow m\mid(a-b)$；

每一个整数 a 恰与 1，2，……，m，这 m 个数中的某一个同余；

2.同余的性质：

1).反身性：$a\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$；

2).对称性：$a\equiv b(\mathrm{mod} m)\Leftrightarrow b\equiv a(\mathrm{mod} m)$；

3).若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$，$b\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$ 则 $a\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$；

4).若 $a_1\equiv b_1(\mathrm{mod}\ m)$，$a_2\equiv b_2(\mathrm{mod}\ m)$，则 $a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2(\mathrm{mod}\ m)$

特别是$a\equiv b(\bmod m)\Leftrightarrow a\pm k\equiv b\pm k(\bmod m)$；

5).若 $a_1\equiv b_1(\bmod m)$，$a_2\equiv b_2(\bmod m)$，则$a_1a_2\equiv b_1b_2(\bmod m)$；

特别是$a\equiv b(\bmod m), k\in Z\Leftrightarrow$ 则$ak\equiv bk(\bmod m)$

$a\equiv b(\bmod m), n\in N\Leftrightarrow$ 则$a^n\equiv b^n(\bmod m)$；

6). $a(b+c)\equiv ab+ac(\bmod m)$；

7).若 $ac\equiv bc(\bmod m)$,则当$(c,m)=1$时，$a\equiv b(\bmod m)$

当$(c,m)=d$时，$a\equiv b(\bmod \frac{m}{d})$.特别地，$ac\equiv bc(\bmod mc)\Leftrightarrow a\equiv b(\bmod m)$；

8).若 $a\equiv b(\bmod m_1)$，

$a\equiv b(\bmod m_2)$

$a\equiv b(\bmod m_3)$

………………

$a\equiv b(\bmod m_n)$，且 $M=[m_1,m_2,\ldots\ldots m_n]$，则$a\equiv b(\bmod M)$

例题讲解

1．证明：完全平方数模 4 同余于 0 或 1；

2．证明对于任何整数$k\ge 0, 2^{6k+1}+3^{6k+1}+5^{6k}+1$能被 7 整除；

3．试判断$1971^{26}+1972^{27}+1973^{28}$能被 3 整除吗？

4．能否把 1，2，……，1980 这 1980 个数分成四组，令每组数之和为 S_1，S_2，S_3，S_4，且满足 S_2-S_1，=10，S_3-S_2=10，S_4-S_3=10;

5．在已知数列 1，4，8，10，16，19，21，25，30，43 中，相邻若干数之和，能被 11 整除的数组共有多少组。

6．设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x^1+a_n$ 是整系数多项式，

证明：若 $f(0),f(1),\cdots,f(1992)$ 都不能被1992整除，则 $f(x)$ 没有整数根；

7．试求出一切可使 $n\cdot 2^n+1$ 被 3 整除的自然数 n；

8．在每张卡片上各写出 11111 到 99999 的五位数，然后把这些卡片按任意顺序排成一列，证明所得到的 444445 位数不可能是 2 的幂；

9．设 $a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$ 是任意一个具有性质 $a_k<a_{k+1},(k\ge 1)$ 的正整数的无穷数列，求证可以把这个数列的无穷多个 a_m 用适当的正整数 x,y 表示为 $a_m=x\cdot a_p+y\cdot a_q,(p\ne q)$

课后练习

1、证明：完全平方数模 3 同余于 0 或 1；
　证明：完全平方数模 5 同余于 0、1 或 4；
　证明：完全平方数模 8 同余于 0、1 或 4；
　证明：完全立方数模 9 同余于-1、0 或 1；
　证明：整数的四次幂模 16 同余于 0 或 1；

2、设 $a\in Z$，且 $(a,10)=1$，求 a^{20}(在十进制中)的末两位数码；

3、求 2^{999} 最后两位数码

4.有一个120位的数，将它的12位数码以一切可能的方式重新排列，然后从按这种方法所得到的120位数中随意挑出120个数来，证明它们的和可以被120整除；

5.连接写出19到80的两位数，问：所得到的数:192021…7980能被1980整除吗？

课后练习答案

1.略

2.解：$\because (a,10)=1, \therefore a$为奇数

$\therefore a^{20}=a^{\varphi(25)}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 25)$

又$\because a^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)\Rightarrow a^{20}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$

又$\because (25,4)=1$

$\therefore a^{20}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 100)$

$\therefore a^{20}$的末两位位01

3.解 考虑用 100 除 2^{999}所得的余数.

$\because 2^{12}=4096\equiv -4(\mathrm{mod}\ 100), \therefore 2^{999}=(2^{12})^{83}\cdot 2^3\equiv(-4)^{83}\cdot 2^3(\mathrm{mod}\ 100).$

又$4^6=2^{12}=4096\equiv -4(\mathrm{mod}\ 100)$，$\therefore 4^{83}=(4^6)^{13}\cdot 4^5\equiv -4^{13}\cdot 4^5\equiv -4^{18}\equiv -(4^6)^3$

$\equiv -(-4)^3\equiv 64(\mathrm{mod}\ 100), \therefore 2^{999}\equiv(-4)^{83}\cdot 2^3\equiv(-64)\cdot 2^3\equiv -2^9\equiv -512$

$\equiv 88 \pmod{100}$.

∴2^{999}的最后两位数字为 88.

3.证：设这120个120位数的前12个数码分别组成的数为：$A_1, A_2, \cdots A_{120}$
而每一数的剩下的108个数码组成了数B，则这120个数的和为：
S=$(A_1 + A_2 + \cdots + A_{120}) \cdot 10^{108} + 120B$
考虑到$40 \mid 10^{108}$，且$A_1, A_2, \cdots A_{120}$每个被3除时余数相同
$\therefore 3 \mid A_1 + A_2 + \cdots + A_{120}$, 又$\because (3,40) = 1 \Rightarrow 120 \mid (A_1 + A_2 + \cdots + A_{120}) \cdot 10^{108}$
$\therefore 120 \mid S$

5.解：设A=192021⋯7980，显然$20 \mid A$
又$\because 100^k = (99+1)^k = 99M + 1 \Rightarrow 100^k \equiv 1 \pmod{99}$
$\because A = 19 \cdot 100^{61} + 20 \cdot 100^{60} + \cdots + 79 \cdot 100 + 80 \equiv (19 + 20 + 21 + \cdots + 79 + 80) \pmod{99}$
$\therefore A \equiv 31 \cdot 99 \pmod{99} \equiv 0 \pmod{99}$
$\therefore 99 \mid A$
又$\because (20,99) = 1$
$\therefore 1980 \mid A$

例题答案：

1．证明：设n是任一整数，则$n=2k$或者$n=2k+1, k\in Z$;

当$n=2k$时，$n^2=4k^2\equiv 0(\bmod 4)$; 当$n=2k+1$时，$n^2=(2k+1)^2\equiv 1(\bmod 4)$;
所以原命题成立；

2.证：令$M=2^{6k+1}+3^{6k+1}+5^{6k}+1$

$$\begin{aligned}\therefore M&=2\cdot 2^{6k}+3\cdot 3^{6k}+5^{6k}+1\\&=2\cdot 64^k+3\cdot 729^k+15625^k+1\\&=2\cdot(7\cdot 9+1)^k+3\cdot(7\cdot 104+1)^k+(7\cdot 2232+1)^k+1\\&=2\cdot 7\cdot A+2+3\cdot 7\cdot B+3+7\cdot C+1+1\\&=(2+3+1+1)(\bmod 7)=0(\bmod 7)\end{aligned}$$

$\therefore$ 对于$\forall k\ge 0$, 且$k\in Z$, $2^{6k+1}+3^{6k+1}+5^{6k}+1$都能被 7 整除；

注：$a\equiv 1(\bmod b)\Rightarrow a^k\equiv 1(\bmod b), k\in Z^+$

3.解：$\because 1971\equiv 0(\bmod 3), 1972\equiv 1(\bmod 3), 1973\equiv 2(\bmod 3)$

$\therefore 1971^{26}+1972^{27}+1973^{28}\equiv(0^{26}+1^{27}+2^{28})(\bmod 3)$

即:$1971^{26}+1972^{27}+1973^{28}\equiv(1+2^{28})(\bmod 3)$

又$\because 2^{28}=4^{14}\equiv 1(\bmod 3)$, $\therefore (1+2^{28})\equiv 2(\bmod 3)$

$\therefore 1971^{26}+1972^{27}+1973^{28}$不能被3整除；

4.解：依题意可知：$T=S_1+S_2+S_3+S_4=S_1+S_1+10+S_1+20+S_1+30$

$\therefore T=4S_1+60\equiv 0(\bmod 4)$

又$\because T=1+2+3+\cdots+1980=\dfrac{1980\cdot 1981}{2}=990\cdot 1981\equiv 2(\bmod 4)$

$\therefore$产生矛盾，$\therefore$不能这样分组；

5.解：记数列各对应项为$a_i, i=1,2,\cdots 10$，并记$S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$

$\therefore S_1,S_2,\cdots,S_{10}$依次为1、5、13、23、39、58、79、104、134、177

它们被11除的余数依次为:1、5、2、1、6、3、2、5、2、1

由此可得：$S_1\equiv S_4(\bmod 11)\equiv S_{10}(\bmod 11), S_2\equiv S_8(\bmod 11), S_3\equiv S_7(\bmod 11)\equiv S_9(\bmod 11)$

由于S_k-S_j是数列$\{a_i\}$相邻项之和，且当$S_k\equiv S_j(\bmod 11)$时，

$11\mid S_k-S_j$，则满足条件的数组有:$3+1+3=7$组

6.证：假设$f(x)$有整数根m，且$m\equiv r(\bmod 1992), 0\le r<1992$

由题意$f(r)$不能被1992整除，

$\because f(m)=0$，则$f(r)-f(m)=f(r)$

又$\because f(r)-f(m)=a_0(r^n-m^n)+a_1(r^{n-1}-m^{n-1})+\cdots+a_{n-1}(r-m)$

$\because m\equiv r(\bmod 1992)$

$\therefore m^i\equiv r^i(\bmod 1992), i=1、2、3、\cdots、n$

$\therefore m^i-r^i\equiv 0(\bmod 1992), i=1、2、3、\cdots、n$

$\therefore 1992\mid f(r)-f(m)=f(r)$

$\therefore$产生矛盾，$\therefore f(x)$没有整数根

7.解：若$3|n\cdot 2^n+1$，则$n\cdot 2^n\equiv 2(\bmod 3)$

考虑到n及2^n，则

当$n=6k+1$时，$(k=0、1、2、\cdots)$

$n\cdot 2^n=(6k+1)\cdot 2^{6k+1}=(12k+2)\cdot(3+1)^k\equiv 2(\bmod 3)$

当$n=6k+2$时，$(k=0、1、2、\cdots)$

$n\cdot 2^n=(6k+2)\cdot 2^{6k+2}=(24k+8)\cdot(3+1)^k\equiv 2(\bmod 3)$

当$n=6k+3$时，$(k=0、1、2、\cdots)$

$n\cdot 2^n=(6k+3)\cdot 2^{6k+3}\equiv 0(\bmod 3)$

当$n=6k+4$时，$(k=0、1、2、\cdots)$

$n\cdot 2^n=(6k+4)\cdot 2^{6k+4}=(96k+64)\cdot(3+1)^k\equiv 1(\bmod 3)$

当$n=6k+5$时，$(k=0、1、2、\cdots)$

$n\cdot 2^n=(6k+5)\cdot 2^{6k+5}=(6\cdot 32k+160)\cdot(3+1)^k\equiv 1(\bmod 3)$

当$n=6k+6$时，$(k=0、1、2、\cdots)$

$n\cdot 2^n=(6k+6)\cdot 2^{6k+6}\equiv 0(\bmod 3)$

由上可知当且仅当$n=6k+1,6k+2$时，$n\cdot 2^n$能被3整除；

8.证：记由11111、11112、……、99999排成的数为A，则：

$A=a_1a_2\cdots\cdots a_{88889},a_i\in\{11111、11112、\cdots\cdots、99999\}$

$\therefore A=a_1\cdot 10^{444440}+a_2\cdot 10^{444435}+a_3\cdot 10^{444430}+\cdots+a_{88888}\cdot 10^5+a_{88889}$

注意到$10^5\equiv 1(\bmod 11111)\therefore 10^{5k}\equiv 1(\bmod 11111),k\in Z$

$\therefore A\equiv a_1+a_2+\cdots+a_{88888}+a_{88889}(\bmod 11111)$

又$\because a_1+a_2+\cdots+a_{88888}+a_{88889}=11111+11112+\cdots+99999=\dfrac{11111+99999}{2}\cdot 88889$

即：$a_1+a_2+\cdots+a_{88888}+a_{88889}=11111\cdot 5\cdot 88889$

$\therefore A\equiv 0(\bmod 11111)$

$\therefore A$不可能是2的幂；

9.证：将$\{a_n\}$按a_2为模的不同剩余类分成若干个子数列

$\because\{a_n\}$为无限集，而子数列却是有限多个

$\therefore$至少有一个子数列有无穷多项

现考虑这个无穷数列

又$\because\{a_n\}$为严格递增的

$\therefore$该子数列中必有一个最小的$a_p,a_p>a_2$，同时还有无限多个a_m属于该子数列，且$a_m>a_p$

$\because a_m\equiv a_p(\bmod a_2)\Rightarrow a_m=a_p+xa_2,x\in Z$

令y=1，$a_q=a_2\Rightarrow a_m=ya_p+xa_q$

$\therefore a_m$是满足题意的要求，且a_m是无限多个

§28 高斯函数

数论函数 $y=[x]$，称为高斯函数，又称取整函数. 它是数学竞赛热点之一.

定义一：对任意实数 $x,[x]$ 是不超过 x 的最大整数，称 $[x]$ 为 x 的整数部分.与它相伴随的是小数部分函数 $y=\{x\},\{x\}=x-[x]$.

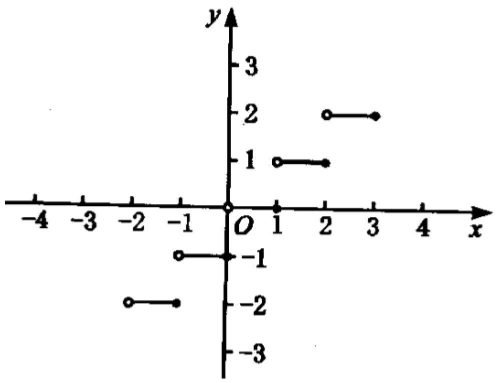
由 $[x]$ 、 $\{x\}$ 的定义不难得到如下性质：

（1） $y=[x]$ 的定义域为 R，值域为 Z； $y=\{x\}$ 的定义域为 R，值域为 $[0,1)$

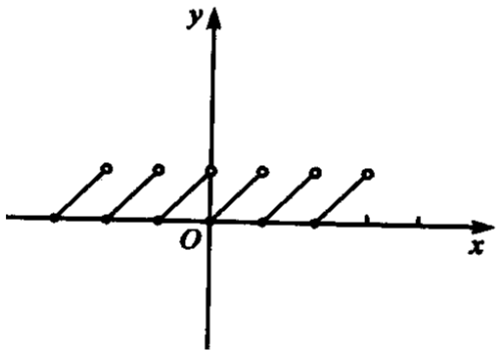
（2）对任意实数x，都有$x=[x]+\{x\}$,且$0\le\{x\}<1$.

（3）对任意实数x，都有$[x]\le x<[x]+1, x-1<[x]\le x$.

（4）$y=[x]$是不减函数，即若$x_1\le x_2$则$[x_1]\le[x_2]$，其图像如图Ⅰ－4－5－1；$y=\{x\}$是以 1 为周期的周期函数，如图Ⅰ－4－5－2.



图Ⅰ—4—5—1



图Ⅰ—4—5—2

（5）$[x+n]=n+[x];\{x+n\}=\{x\}$.其中$x\in R, n\in N^*$.

（6）$[x+y]\ge[x]+[y];\{x\{x\}+\{y\}\ge\{x+y\};[\sum_{i=1}^{n}x_i]\ge\sum_{i=1}^{n}[x_i], x_i\in R$；特别地，$[\frac{na}{b}]\ge n[\frac{a}{b}]$.

（7）$[xy]\ge[x]\cdot[y]$，其中$x,y\in R_+$；一般有$[\prod_{i=1}^{n}x_i]\ge\sum_{i=1}^{n}[x_i], x_i\in R_+$；特别地，$[\sqrt[n]{x}]^n\le[x], x\in R+, n\in N^*$.

（8）$[\frac{x}{n}]=[\frac{[x]}{n}]$，其中$x\in R+, n\in N^*$.

例题讲解

1．求证：$2^{n-1}\ n!\Leftrightarrow n=2^{k-1}$,其中$k$为某一自然数.

2．对任意的$n\in N^*$,计算和$S=\sum_{K=0}^{\infty}[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]$.

3．计算和式$S=\sum_{n=0}^{502}[\frac{305n}{503}]$的值.

4．设M为一正整数，问方程$x^2-[x]^2=\{x\}^2$，在[1，M]中有多少个解？

5．求方程$4x^2-40[x]+51=0$的实数解.

6．$x\in R+,n\in N^*$,证明:$[nx]\geq\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\frac{[3x]}{3}+\cdots+\frac{[nx]}{n}$.

7．对自然数 n 及一切自然数 x，求证：

$[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx]$..

8．求出$[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}]$的个位数字

例题答案：

1．证明：2 为质数，n!中含 2 的方次数为

$$2(n!)=\sum_{t=1}^{\infty}[\frac{n}{2^t}].$$

若 $n=2^{k-1}$,则$2(n!)=\sum_{t=1}^{\infty}[2^{k-t-1}]=\sum_{t=1}^{k-1}[2^{k-t-1}]=1+2+2^2+\cdots+2^{k-2}=2^{k-1}-1=n-1$

故$2^{n-1} \mid n!$.

反之，若 n 不等于 2 的某个非负整数次幂，可设 n=$2^s p$，其中 p>1 为奇数，这时总可以找出整数 t，使$2^t < 2^s p < 2^{t+1}$,于是$n!$中所含2的方次数为$2(n!) = [2^{s-1}p] + [2^{s-2}p] + \cdots +$

$[2^{s-t}p] + 0 + \cdots \le [(2^{s-1} + 2^{s-2} + \cdots + 2^{s-t})p] = [2^{s-t}(2^t - 1)p] = [2^s p - 2^{s-t}p] = n + [-2^{s-t}p].$

由于 $1 < 2^{s-t}p < 2$,则$[-2^{s-t}] = -2$,故$n!$中含2的方次数$2(n!) \le n-2$,则$2^{n-1} \nmid n!$.这与已知矛盾，故必要性得证.

2．解：因$[\frac{n+2}{2^{k+1}}] = [\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}]$对一切 k=0,1,⋯成立，因此，

$[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}] = [2 \cdot \frac{n}{2^{k+1}}] - [\frac{n}{2^{k+1}}].$

又因为 n 为固定数，当 k 适当大

时,$\frac{n}{2^k} < 1$,从而$[\frac{n}{2^k}] = 0$,故$S = \sum_{K=0}^{\infty}([\frac{n}{2^k}] - [\frac{n}{2^{k+1}}]) = \cdots = n.$

3．解：显然有：若$\{x\} + \{y\} = 1$,则$[x+y] = [x] + [y] + 1, x, y \in R.$

503 是一个质数，因此，对 n=1,2,⋯,502, $\frac{305n}{503}$ 都不会是整数，但$\frac{305n}{503} + \frac{305(503-n)}{503} = 305$,

可见此式左端的两数的小数部分之和等于 1，于是，$[\frac{305n}{503}] + [\frac{305(503-n)}{503}] = 304$.故

$$S = \sum_{n=1}^{502}[\frac{305n}{503}] = \sum_{n=1}^{251}([\frac{305n}{503}] + [\frac{305(503-n)}{503}]), = 304 \times 251 = 76304.$$

4．解：显然 x=M 是一个解,下面考察在[1，M]中有少个解.

设 x 是方程的解.将$x^2 = [x]^2 + 2\{x\} \cdot \{x\} + \{x\}^2$代入原方程，化简得 $2[x]\{x\} =$

$[2[x]\{x\} + \{x\}^2]$.由于$0 \le \{x\} < 1$,所以上式成立的充要条件是 $2[x]\{x\}$ 为一个整数.

设$[x] = m \in N$,则必有$\{x\} = \frac{k}{2m}(k = 0,1,\cdots,2m-1)$,即在$[m, m+1)$中方程有$2m$个解.
又由于$1 \le m \le M-1$,可知在$[1, M)$中方程有$2(1+2+\cdots+(M-1)) = M \cdot (M-1)$个解.
因此,原方程在$[1, M]$中有$M(M-1)+1$个解.

5．解：因$[x] \le x < [x]+1$,又$[x] < 0$不是解.

$$\therefore\begin{cases}4([x]+1)^2-40[x]+51>0,\\4[x]^2-4[x]+51\le 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2[x]-5)(2[x]-11)>0.\\(2[x]-3)(2[x]-7\le 0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}[x]<\frac{5}{2},\\[x]\ge\frac{3}{2},\\[x]\le\frac{17}{2};\end{cases}\text{或}\begin{cases}[x]>\frac{11}{2},\\[x]\ge\frac{3}{2},\\[x]\le\frac{17}{2}.\end{cases}$$

解得$[x]=2$或$[x]=6$或7或8,分别代入方程得:

$$4x^2-29=0,x=\frac{\sqrt{29}}{2};$$

$$4x^2-189=0,x=\frac{\sqrt{189}}{2};$$

$$4x^2-229=0,x=\frac{\sqrt{229}}{2};$$

$$4x^2-269=0,x=\frac{\sqrt{269}}{2}.$$

经检验知，这四个值都是原方程的解.

6．这道题的原解答要极为复杂，现用数学归纳法证明如下.

【证明】令$A_k=[x]+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[kx]}{k},k=1,2,\cdots.$

由于 $A_1=[x]$,则$n=1$时,命题成立.

设$n\le k-1$时命题成立,即有$A_1\le[x],A_2\le[2x],\cdots,A_{k-1}\le[(k-1)x]$.因为,

$A_k-A_{k-1}=\frac{[kx]}{k}$,即$kA_k-kA_{k-1}=[kx]$对一切$k$成立,所以$kA_k-kA_{k-1}=[kx],(k-1)$

$A_{k-1}-(k-1)A_{k-2}=[(k-1)x],\cdots,2A_2-2A_1=[2x],A_1=[x]$.相加得:

$$kA_k-(A_1+A_2+\cdots+A_{k-1})=[x]+[2x]+\cdots+[(k-1)x]+[kx]$$

故$kA_k=[x]+[2x]+\cdots+[(k-1)x]+[kx]+A_{k-1}+A_{k-2}+\cdots+A_2+A_1$

$\le[x]+[2x]+\cdots+[(k-1)x]+[kx]+[(k-1)x]+[(k-2)x]+\cdots+[2x]+[x]$

$=([x]+[(k-1)x]+([2x]+[(k-2)x])+\cdots+([(k-1)x]+[x])+[kx]\le[kx]+[kx]+\cdots[kx]+[kx]$

$=k[kx]$

$\therefore A_k\le[kx]$,即$n=k$时,命题成立,故原不等式对一切$n\in N^*$均成立,证毕.

7．解：M＝$|f(x)|_{max}$＝max{|f(1)|，|f(－1)|，|f(－$\frac{a}{2}$)|}

⑴若$|-\frac{a}{2}|\geq 1$ (对称轴不在定义域内部)

则 M＝max{|f(1)|，|f(－1)|}

而 f(1)＝1＋a＋b

f(－1)＝1－a＋b

|f(1)|＋|f(－1)|≥|f(1)＋f(－1)|＝2|a|≥4

则|f(1)|和|f(－1)|中至少有一个不小于 2

∴ $M\geq 2>\frac{1}{2}$

⑵$|-\frac{a}{2}|<1$

$M=\max\{|f(1)|, |f(-1)|, |f(-\frac{a}{2})|\}$

$=\max\{|1+a+b|, |1-a+b|, |-\frac{a^2}{4}+b|\}$

$=\max\{|1+a+b|, |1-a+b|, |-\frac{a^2}{4}+b|, |-\frac{a^2}{4}+b|\}$

$\geq\frac{1}{4}(|1+a+b|+|1-a+b|+|-\frac{a^2}{4}+b|+|-\frac{a^2}{4}+b|)$

$\geq\frac{1}{4}[(1+a+b)+(1-a+b)-(-\frac{a^2}{4}+b)-(-\frac{a^2}{4}+b)]$

$=\frac{1}{4}(2+\frac{a^2}{2})$

$\geq\frac{1}{2}$

综上所述，原命题正确.

8．先找出$\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}$的整数部分与分数部分.

$$\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}=\frac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}+\frac{3^{200}}{10^{100}+3}$$

$(10^{100})^{200}-3^{200}=[(10^{100})^{2}]^{100}-(3^{2})^{100}$,

知$(10^{100})^{2}-3^{2}\mid 10^{20000}-3^{200}$

又$10^{100}+3\mid(10^{100})^{2}-3^{2}$,

知$\frac{10^{20000}-3^{200}}{10^{100}+3}$

是整数.

显然$\frac{3^{200}}{10^{100}+3}=\frac{9^{100}}{10^{100}+3}<1$,

知$[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}]=\frac{10^{2000}-3^{200}}{10^{100}+3}=\frac{10^{20000}-9^{100}}{10^{100}+3}=\frac{10^{20000}-81^{50}}{10^{100}+3}$.

其中分母的个位数字为 3，分子的个位数字为 9，故商的个位数字为 3.

§26 覆盖

一个半径为 1 的单位圆显然是可以盖住一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆的．反过来则不然，一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆无法盖住单位圆．那么两个半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆能否盖住呢？不妨动手实验一下，不行．为什么不行？需几个这样的小圆方能盖住大圆？……，这里我们讨论的就是覆盖问题，它是我们经常遇到的一类有趣而又困难的问题．

定义　设G和F是两个平面图形．如果图形F或由图形F经过有限次的平移、旋转、对称等变换扣得到的大小形状不变的图形F′上的每一点都在图形G上．我们就说图形G覆盖图形F；反之，如果图形F或F′上至少存在一点不在G上，我们就说图形G不能覆盖图形F．

关于图形覆盖，下述性质是十分明显的：

（1）　图形G覆盖自身；

（2）　图形G覆盖图形E，图形E覆盖图形F，则图形G覆盖图形F．

1．最简单情形——用一个圆覆盖一个图形．

首先根据覆盖和圆的定义及性质即可得到：

定理1　如果能在图形F所在平面上找到一点O，使得图形F中的每一点与O的距离都不大于定长r，则F可被一半径为r的圆所覆盖．

定理2　对于二定点A、B及定角α若图形F中的每点都在AB同侧，且对A、B视角不小于α，则图形F被以AB为弦，对AB视角等于α的弓形G所覆盖．

在用圆去覆盖图形的有关问题的研究中，上述二定理应用十分广泛．

2．一个图形F能否被覆盖，与图形中任意两点间的距离最大值d密切相关．

以下我们称图形F中任意两点间的距离最大值d为图形F的直径．

我们继续研究多个圆覆盖一个图形问题．

定义　对于图形G_1，G_2，…，G_n，若图形F中的每一点都被这组图形中的某个所覆盖，则称这几个图形覆盖图形F．

图形G_1，G_2，…，G_n为n个圆是一特殊情形．

3．直线形图形覆盖别的图形的问题

解决直线形图形覆盖别的图形的问题，常须较高的智巧，一般的处理方法是通过构造过渡图形，逐步调整，最终获得问题的解决.

4.图形的嵌入是覆盖问题的一种重要变化形式

所谓图形F能嵌入图形G,其本质就是图形G能覆盖图形F.

例题讲解

1．求证：（1）周长为2 l 的平行四边形能够被半径为$\frac{l}{2}$的圆面所覆盖.

（2）桌面上放有一丝线做成的线圈，它的周长是2 l，不管线圈形状如何，都可以被个半径为$\frac{l}{2}$的圆纸片所覆盖.

2．△ABC的最大边长是a，则这个三角形可被一半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$的圆所覆盖.

3．△ABC的最大边 BC等于a，试求出覆盖△ABC的最小圆.

4．以ABCD的边为直径向平行四边形内作四个半圆，证明这四个半圆一定覆盖整个平行四边形.

5．求证：一个直径为 1 的圆不能被两个直径小于 1 的圆所覆盖．

6．给定一个半径为 1 的圆，若用半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆去覆盖它，问至少要几个才能盖住．

7．证明直径为 1 的图形 F 可被单位正方形覆盖．

8．直径为 1 的图形 F 可被一个边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形覆盖，试证明之．

9．试证面积为 S、周长为 P 的四边形一定可嵌入一个半径为 $\frac{S}{P}$ 的圆．

10. 在一个半径等于 18 的圆中已嵌入 16 个半径为 3 的圆.证明在余下的部分中还能嵌入 9 个半径为 1 的圆.

例题答案：

１．分析　（１）关键在于圆心位置，考虑到平行四边形是中心对称图形，可让覆盖圆圆心与平行四边形对角线交点叠合．

（２）＂曲＂化＂直＂．对比（１），应取均分线圈的二点连线段中点作为覆盖圆圆心．

证明　（１）如图４５－１，设ＡＢＣＤ的周长为２ｌ，ＢＤ≤ＡＣ，ＡＣ、ＢＤ交于Ｏ，Ｐ为周界上任意一点，不妨设在ＡＢ上，则

∠１≤∠２≤∠３，有ＯＰ≤ＯＡ．

又ＡＣ＜ＡＢ＋ＢＣ＝ｌ，故ＯＡ＜$\frac{l}{2}$．

因此周长为２ｌ的平行四边形ＡＢＣＤ可被以Ｏ为圆心；半径为$\frac{l}{2}$的圆所覆盖，命题得证．

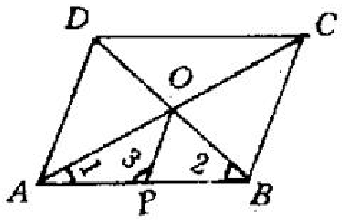


图　45-1

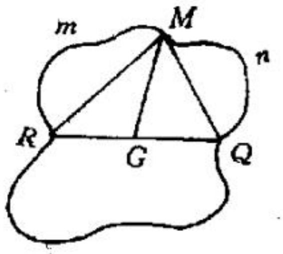


图 45-2

（2）如图 45-2,在线圈上分别取点 R，Q，使 R、Q 将线圈分成等长两段，每段各长 1.又设 RQ 中点为 G，M 为线圈耻任意一点，连 MR、MQ，则

$$GM \leq \frac{1}{2}(MR+MQ) \leq \frac{1}{2}(MmR+MnQ) = \frac{l}{2}$$

因此，以 G 为圆心，$\frac{l}{2}$长为半径的圆纸片可以覆盖住整个线圈．

２．分析　a 为最大边，所对角 A 满足６０°≤A＜１８０°．

证明 不妨设 BC＝a，以BC 为弦，在A 点所在一侧作含 60°角的弓形弧（图４５－３）.因６０°≤A≤180°，故根据定理２，△ABC 可被该弓形所覆盖．

由正弦定理，弓形相应半径 r ＝ $\frac{a}{2\sin 60°}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，所以△ABC 可被半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 的圆所覆盖.

显然覆盖△ABC 的圆有无穷多个，那么半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 的圆是否是最小的覆盖圆呢？事实并不

尽然.

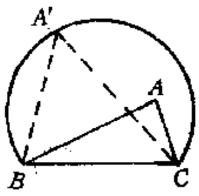


图 45-3

3．解　分三种情形进行讨论：

（1）　∠A 为钝角，以 B C 为直径作圆即可覆盖△A BC.

（2）　∠A 是直角，同样以 B C 为直径作圆即可覆盖 △ABC；

（3）∠A 是锐角．假若⊙O 覆盖△ABC，我们可在⊙O 内平移△ABC，使一个顶点 B 落到圆周上，再经过适当旋转，使另一个顶点落在圆周上，此时第三个顶点 A 在⊙O 内或其圆周上，设 BC 所对圆周角为 α，那么∠BAC≥α，设⊙O 直径 d， △ABC 外接圆直径 d_0，那么

$$d=\frac{BC}{\sin\alpha}\geq\frac{BC}{\sin\angle BAC}=d_o$$

所以对于锐角三角形 ABC，最小覆盖圆是它的外接圆.

今后我们称覆盖图形 F 的圆中最小的一个为 F 的最小覆盖圆．最小覆盖圆的半径叫做图形 F 的覆盖半径.

综合例 2 、例 3 ，即知△ABC 中，若 a 为最大边，则△ABC 的覆盖半径 r 满足

$$\frac{a}{2}\leq r\leq\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

４．分析１　ＡＢＣＤ的每一点至少被某个半圆所盖住．

证明１　用反证法．如图４５－４设存在一点Ｐ在以ＡＢ、ＢＣ、ＣＤ、ＤＡ为直径的圆外，根据定理二，∠ＡＰＢ，∠ＢＰＣ，∠ＣＰＤ∠ＤＰＡ均小于９０°，从而

∠ＡＰＢ＋∠ＢＰＣ＋∠ＣＰＤ＋∠ＤＰＡ＜３６０°．

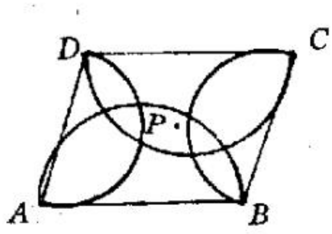


图 45-4

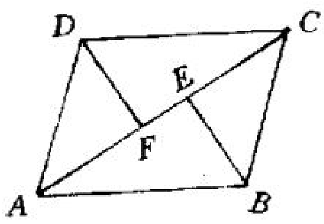


图 45-5

与四角和应为周角相矛盾．故Ｐ应被其中一半圆盖住，即所作四个半圆覆盖ＡＢＣＤ．

分析２　划片包干，如图４５－５，将ＡＢＣＤ分为若干部分，使每一部分分别都被上述四个半圆所覆盖．

证明２　在ＡＢＣＤ中，如图４５－５，设ＡＣ≥ＢＤ．分别过Ｂ、Ｄ引垂线ＢＥ、ＤＦ垂直ＡＣ，交ＡＣ于Ｅ、Ｆ，将ＡＢＣＤ分成四个直角三角形，△ＡＢＥ、△ＢＣＥ、△ＣＤＦ、△ＤＡＦ．每一个直角三角形恰好被一半圆所覆盖，从而整个四边形被四个半圆所覆盖．

５．证明　如图４５－６，先考虑其中一个小圆即⊙O_1去覆盖大圆Ｏ，连O_1、Ｏ过Ｏ作ＡＢ⊥O_1Ｏ，ＡＢ为⊙Ｏ的直径（若O_1、Ｏ重合，那么ＡＢ为任意直径）此时

$$O_1A=O_1B\geq OA.$$

故Ａ、Ｂ两点都不能被⊙O_1盖住．至于另一小圆⊙O_2无疑不能同时盖住Ａ、Ｂ两点，故⊙O_1、⊙O_2不能覆盖⊙Ｏ．

事实上，我们还可以从另一角度给予证明．那就是一个小圆无法覆盖半个大圆，因此两个小圆也就不可能覆盖住整个大圆了．

现在，我们着手研究本文一开始就提出的问题．

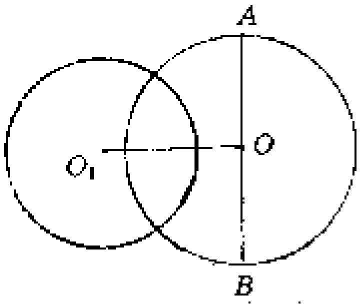


图 45 6

6. 问题需要我们在二个方面给予回答：一是所确定数目的小圆足以覆盖大圆；二是少于确定的数目，则全部小圆不能覆盖大圆.

对于不能覆盖的推断，以下两个原则是常用的：

原则 1　若图形 F 的面积大于图形 G 的面积，则图形 G 不能覆盖图形 F .

原则 2　直径为 d 的图形 F 不能被直径小于 d 的图形 G 所覆盖.

两原则十分显然，不再证明.

四个半径为 $\frac{1}{2}$ 的小圆面积和为 π，恰等于大圆面积，而四小圆间若不重迭，则覆盖其它图形时，还须排除中间所夹的不属于四圆的部分，换句话说，四小圆所覆盖大圆部分面积必小于大圆自身面积，根据法则 1 ，不可能覆盖大圆，少于四个小圆更不可能.

若有五个小圆，我们改变角度考虑，可将大圆周分为六等分. 因小圆直径为 1 ，五个小圆无法盖住大圆周，而六个圆周恰好盖住.

还需考虑大圆圆心没有被盖住，再添加一个小圆，符合要求！

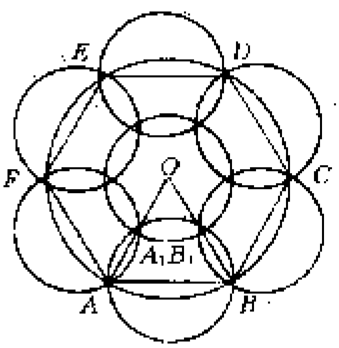


图 45-7

这说明：至少七个以 $\frac{1}{2}$ 为半径的小圆方能覆覆盖半径为 1 的一个大圆. 事实上这样的六个小圆若盖住大圆周，则大圆心不能被覆盖. 若其中一小圆盖住大圆圆心，那么该圆又至多盖住大圆周上一点也就是六个小圆无法覆盖大圆，而我们作大圆的内接正六边形，分别将小圆圆心与各边中点重合，再将第七个小圆圆心与大圆圆心重合即可盖住大圆，如图４５－７，以下给出证明：

对于正△ＯＡＢ，设ＯＡ、ＯＢ中点A_1、B_1，那么$\angle AA_1B=\angle AB_1B=90°$，故四边形$AA_1B_1B$被以ＡＢ为直径的圆覆盖. 另外，$\triangle OA_1B_1$被小圆⊙Ｏ所覆盖. 类似地可推得七个小圆覆盖整个大圆.

$$=(\frac{1}{4})^{42}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin 18^\circ \sin 36^\circ \sin 54^\circ \sin 72^\circ$$
$$=(\frac{1}{4})^{42}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}\cos 72^\circ \cos 54^\circ \cos 36^\circ \cos 18^\circ$$
$$=(\frac{1}{4})^{42}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}\cos 18^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ \cos 54^\circ$$
$$=(\frac{1}{4})^{42}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}\cos 18^\circ \cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 54^\circ$$
$$=(\frac{1}{4})^{43}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}\sin 72^\circ \cos 54^\circ$$
$$=(\frac{1}{4})^{43}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}\cos 18^\circ \sin 36^\circ$$

又 $(\cos 18^\circ \sin 36^\circ)^2=\frac{1}{4}(1+\cos 36^\circ)(1-\cos 72^\circ)$

$$=\frac{1}{4}(1+\cos 36^\circ-\cos 72^\circ-\cos 36^\circ \cos 72^\circ)$$
$$=\frac{1}{4}(1+\cos 36^\circ \cos 72^\circ)$$
$$=\frac{5}{16}$$

即 $\cos 18^\circ \sin 36^\circ=\frac{\sqrt{5}}{4}.$

所以 $\sin 1^\circ \sin 2^\circ \cdots \sin 89^\circ=(\frac{1}{4})^{45}\times 6\sqrt{10}.$

7. 分析　先后用互相垂直的两对平行线将图形夹在中间，再向内收缩.

证明　取位于水平方向和铅直方向的两对平行直线将图形Ｆ夹在中间，再将位于下方的直线l_2向上平移，直至遇到图形Ｆ上点为止，中图４５－８中l_2'处. 接着又将l_1向下平移至与l_2'相距为１的l_1'处止. 因图形Ｆ直径为１. 故图形Ｆ仍被二直线l_1'，l_2'所夹. 同样采用先左后右的顺序，将沿直线m_1、m_2平移至m_1'、m_2'处，m_1

′、m_2′相距为1，而图形F依然夹在直线m_1′，m_2′中间，从而直线l_1′、l_2′、m_1′、m_2′所围成单位正方形即可覆盖图形F．

运用上述方法，我们可进一步解决以下问题：

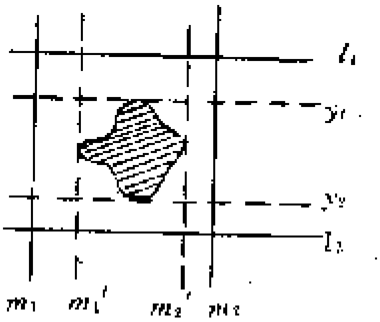


图 45-8

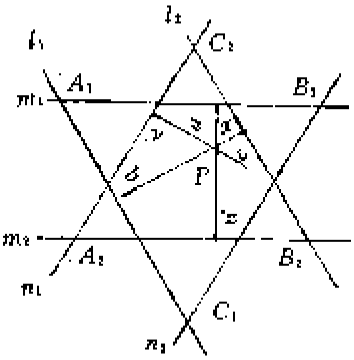


图 45-9

8. 证明　作三对相距为1的平行直线m_1、m_2、n_1、n_2，l_1、l_2，相交直线所成角为60°，围成可覆盖图形F的六边形及正△$A_1B_1C_1$，正△$A_2B_2C_2$（具体作法可参照例7）．如图45－9．设P为F中任意一点，它到六边形各边距离依次为x、a、y、b、z、c．又设正△$A_1B_1C_1$的高为h_1，正△$A_2B_2C_2$的高为h_2．因正三角形内一点到三边距离和等于正三角形的高，得

$a+b+c=h_1$，

$x+y+z=h_2$．

相加,得

$(x+b)+(y+c)+(z+a)=h_1+h_2$，

又$x+b=1$，$y+c=1$，$z+a=1$，

$\therefore h_1+h_2=3$．

根据抽屉原则，h_1、h_2中有一不大于$\frac{3}{2}$，不妨设$h_1\le\frac{3}{2}$，即正△$A_1B_1C_1$的高不大于$\frac{3}{2}$，那么它的边长

$$a_1=\frac{h_1}{\sin 60^\circ}\le\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}.$$

因此图形F可被边长不大于$\sqrt{3}$的正三角形即正△$A_1B_1C_1$所覆盖.

9.分析 四边形内存在到各边距离不小于$\frac{S}{P}$的点.

证明　如图 45-10,设四边形 ABCD 面积为S,周长为P.各边长分别为a_1、a_2、a_3、a_4.现以a_1、a_2、a_3、a_4为长,$\frac{S}{P}$为宽,向四边形内侧作矩形,则这些矩形总面积是

$$\begin{aligned}&a_1\cdot\frac{S}{P}+a_2\cdot\frac{S}{P}+a_3\cdot\frac{S}{P}+a_4\cdot\frac{S}{P}\\&=(a_1+a_2+a_3+a_4)\cdot\frac{S}{P}\\&=P\cdot\frac{S}{P}\\&=S.\end{aligned}$$

即四个矩形面积总和等于四边形面积.由于这四个矩形有重迭部分,所以四边形内部存在点0没有被矩形覆盖,那么以点0为圆心,$\frac{S}{P}$为半径的圆可嵌入四边形 ABCD 中.

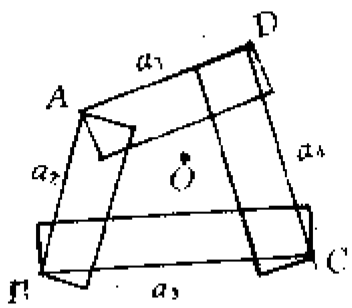


图 45 10

10.证明　首先证明大圆中还能嵌入1个半径为1的小圆.先将大圆的半径收缩为17,而将半径为3的圆膨胀成半径为4的圆,此时大圆面积变为

$\pi\times17^2=289\pi$.

16 个半径为 4 的圆的面积是

$\pi\times4^2\times16=256\pi$.

$289\pi-256\pi=33\pi$.

这说明大圆中嵌入 16 个半径为 3 的圆外，还能嵌入半径为 1 的一个小圆，如图 45-11 所示.

再将大圆的半径收缩为 17，半径为 3 的圆的半径膨胀为 4，半径为 1 的圆膨胀为 2，由于

$289\pi-256\pi-4\pi=29\pi$，所以大圆中除嵌入 16 个半径为 3 的圆外，还能嵌入两个半径为 1 的圆.依此类推，由于 $289\pi-256\pi-4\pi\times8=\pi>0$,

故大圆还可嵌入九个半径为 1 的小圆.

将图形收缩、膨胀是解嵌入问题一种重要方法.

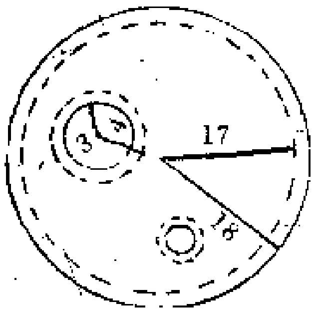


图 45-11

§29 涂色问题

涂色问题是数学竞赛中较为典型的问题，可以直接用抽屉原则解决涂色问题。另一方面，也

可以将别的有关问题“涂色”，转化为涂色问题，涂色问题本身，有其深刻的数学背景。有些问题，本来就属于图论的内容。有些问题的解决，则需要用到数论、组合数学的理论和方法。这里介绍，只是中学数学竞赛中的有关问题。

1. 小方格染色问题

最简单的染色问题是从一种民间游戏中发展起来的方格盘上的染色问题.解决这类问题的方法后来又发展成为解决方格盘铺盖问题的重要技巧.

2. 线段染色和点染色

(1)线段染色.较常见的一类染色问题是发样子组合数学中图论知识的所谓“边染色”（或称“线段染色”），主要借助抽屉原则求解.

（2）点染色.先看离散的有限个点的情况.

例题讲解

1．把正方形 ABCD 的一边 AB 分成 n 段，使奇数号的线段长度之和等于偶数号的线段长度之和（如图 01—01）。过各分点作平行于 AD 的线段，得到 n 个矩形。每一个矩形又被对角线 BD 分成两部分。将奇数号矩形左部及偶数号矩形的右部涂上同一颜色。证明：在对角线 BD 两侧的有同色的部分，其面积和相等。

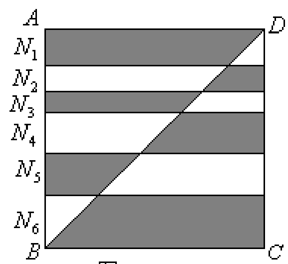


图 01—01

2．在一张无限方格纸的某些方格上涂上红色，其余方格涂上蓝色，每一个 2×3 的六方格矩形内恰好 2 个红方格。试问：一个 9×11 的 99 方格矩形内包含多少个红方格？

3．在 n×n（n≥2）个方格的正方形表中，有 n－1 个格子里涂了色，求证：通过交换两行或两列的位置，总可以将所有涂色的方格移到正方形表的左上角顶点到右下角顶点的对角线下方。

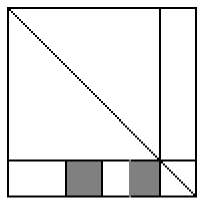


图 01—04

4．有 n×n（n≥3）个方格表中，先在表中任意选出 n－1 个方格都涂成黑色，然后将那些凡是至少与两个已涂色的方格相邻的方格也都涂黑色。求证：不论怎样选择最初的 n－1 个方格，都不能按这样的法则，将表中的所有方格全涂黑。

5．设 ABC 为正三角形，E 为线段 BC，CA，AB 上点的集合（包括 A，B，C 在内）。将E 分成两个子集，求证：总有一个子集中含有一个直角三角形的顶点。

6．设 a_1，a_2，a_3……是一个不减的正整数序列，定义 b_m 是使 a_n≥m 的 n 的最小值，若 $a_{19}=85$，试求 $a_1+a_2+\cdots+a_{19}+b_1+b_2+\cdots+b_{85}$ 的值。

7．有 1987 块玻璃片，每块上涂有红、黄、蓝三色之一，进行下列操作：将不同颜色的两块玻璃片擦净，然后涂上第三种颜色。

（1）求证：无论开始时红、黄、蓝色玻璃片各有多少块，总可以经过有限次操作而使所有的玻璃片涂有同一种颜色；

（2）求证：玻璃片最后变成哪种颜色，与操作顺序无关。

8．把集合 M={1，2，…，1987}的元素用 4 种颜色涂色，求证：至少存在一种涂色方法，使得 M 中任何等差数列的 10 项，不是同一颜色。

9．平面直角坐标系中，纵横坐标都是整数的点称为整点称为整点。设计一种方法，将所有整点涂色，每一个整点染成白色、红色或黑色中的一种颜色，使得

（1）每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线上；

（2）对任意白点 A、红点 B 及黑点 C，总可以找到一个红点 D，使得 ABCD 为一平行四边形。证明你设计的的方法符合上述要求。

10. 将平面上每个点染上两种颜色中的一种，已知任一边长为 1 的正三角形都有两种颜色的顶点，

（1）求证：存在边长为 $\sqrt{3}$ 的同色正三形（即顶点同色）；

（2）举出染色满足题设要求的平面的例子。

11．平面上有 6 点，任何三点都是一个不等边三角形的顶点，求证：这些三角形的边中一定有一条，它在一个三角形中是最长边，而在另一个三角形中是最短边。

12．平面上任一点都染上红、蓝、黄三色中的一种，求证：一定存在一条端点同色且长度为 1 的线段。

课后练习

1. 证明:用 15 块大小是 4×1 的矩形瓷砖和 1 块大小是 2×2 的矩形瓷砖，不能恰好铺盖 8×8 矩形的地面.

2．世界上任何六个人中，一定有 3 个人或者互相认识或者互相都不认识.

3．空间六点，任三点不共线，任四点不共面，成对地连接它们得十五条线段，用红色或蓝色染这些线段（一条线段只染一种颜色）.求证:无论怎样染,总存在同色三角形.

4．有 17 位科学家,其中每一个人和其他所有人的人通信,他们的通信中只讨论三个题目.求证:至少有三个科学家相互之间讨论同一个题目.

5．能否把 1，1，2，2，3，3，…，1986，1986 这些数排成一行，使得两个 1 之间夹着一个数，两个 2 之间夹着两个数，…，两个 1986、之间夹着一千九百八十六个数？请证明你的结论.

课后练习答案

1．（分析　将 8×8 矩形地面的一半染上一种颜色，另一半染上另一种颜色，再用 4×1 和 2×2 的矩形瓷砖去盖，如果盖住的两种颜色的小矩形不是一样多，则说明在给定条件不完满铺盖不可能.

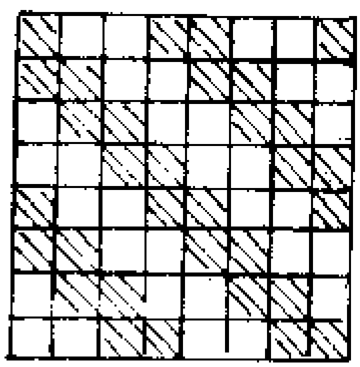


图 29-3

证明　如图 29-3，用间隔为两格且与副对角线平行的斜格同色的染色方式，以黑白两种颜色将整个地面的方格染色．显然，地面上黑、白格各有 32 个．

每块 4×1 的矩形砖不论是横放还是竖盖，且不论盖在何处，总是占据地面上的两个白格、两个黑格，故 15 块 4×1 的矩形砖铺盖后还剩两个黑格和两个白格．但由于与副对角线平行的斜格总是同色，而与主对角线平行的相邻格总是异色，所以，不论怎样放置，一块 2×2 的矩形砖，总是盖住三黑一白或一黑三白．这说明剩下的一块 2×2 矩形砖无论如何盖不住剩下的二黑二白的地面．从而问题得证．

2．同 3

3．证明　设 A、B、C、D、E、F 是所给六点．考虑以 A 为端点的线段 AB、AC、AD、AE、AF，由抽屉原则这五条线段中至少有三条颜色相同，不妨设就是 AB、AC、AD，且它们都染成红色．再来看△BCD 的三边，如其中有一条边例如 BC 是红色的，则同色三角形已出现（红色△ABC）；如△BCD 三边都不是红色的，则它就是蓝色的三角形，同色三角形也现了．总之，不论在哪种情况下，都存在同色三角形．

如果将习题 2 中的六个人看成习题 3 中六点，两人认识的连红线，不认识的连蓝线，则习题 2 就变成了习题 3．习题 3 的证明实际上用染色方法给出了习题 5 的证明．

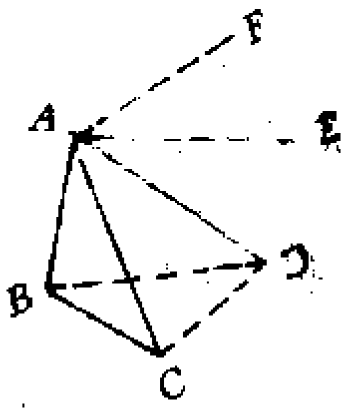


图 29-5

4．证明　用平面上无三点共线的 17 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{17}$ 分别表示 17 位科学家．设他们讨论的题目为 x, y, z，两位科学家讨论 x 连红线，讨论 y 连蓝线，讨论 z 连黄线．于是只须证明以这 17 个点为顶点的三角形中有一同色三角形．

考虑以 A_1 为端点的线段 $A_1A_2, A_1A_3, \cdots, A_1A_{17}$，由抽屉原则这 16 条线段中至少有 6 条同色，不妨设 A_1A_2，A_1A_3，…，A_1A_7 为红色．现考查连结六点 A_2，A_3，…，A_7 的 15 条线段，如其中至少有一条红色线段，则同色（红色）三角形已出现；如没有红色线段，则这 15 条线段只有蓝色和黄色，由例 5 知一定存在以这 15 条线段中某三条为边的同色三角形（蓝色或黄色）．问题得证．

上述三例同属图论中的接姆赛问题. 在图论中, 将 n 点中每两点都用线段相连所得的图形叫做 n 点完全图, 记作 k_n. 这些点叫做“顶点”，这些线段叫做“边”. 现在我们分别用 图论的语言来叙述 习题 3、习题 4.

定理 1　若在 k_6 中，任染红、蓝两色，则必有一只同色三角形.

定理 2　在 k_{17} 中, 任染红、蓝、黄三角，则必有一只同色三角形.

5. 证明　将 1986×2 个位置按奇数位着白色，偶数位着黑色染色，于是黑白点各有 1986 个.



图 29-6

现令一个偶数占据一个黑点和一个白色，同一个奇数要么都占黑点，要么都占白点. 于是 993 个偶数，占据白点 $A_1=993$ 个，黑色 $B_1=993$ 个.

993 个奇数，占据白点 $A_2=2a$ 个，黑点 $B_2=2b$ 个，其中 $a+b=993$.

因此，共占白色 $A=A_1+A_2=993+2a$ 个.

黑点 $B=B_1+B_2=993+2b$ 个，

由于 $a+b=993$（非偶数！）∴$a\neq b$，从而得 $A\neq B$. 这与黑、白点各有 1986 个矛盾.

故这种排法不可能.

“点”可以是有限个，也可以是无限个，这时染色问题总是与相应的几何问题联系在一起的.

例题答案：

1. 证明：设矩形中涂的是红色，不涂的为白色，则

$$S_{左红}+S_{右白}=S_{右红}+S_{左白}=\frac{1}{2}S_{正方形}$$

另外，$S_{左红}+S_{左白}=\frac{1}{2}S_{正方形}$

$$\therefore S_{左红}+S_{左白}=S_{右红}+S_{右白}$$

$$\therefore S_{左红}=S_{右红}$$

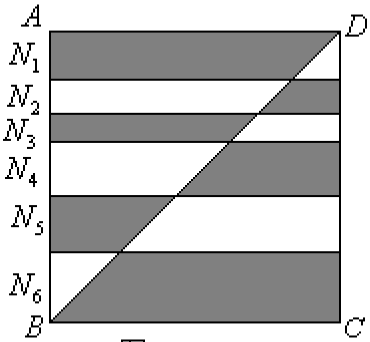


图 01—01

2. 答案：33 个红方格。

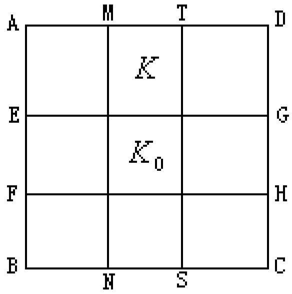
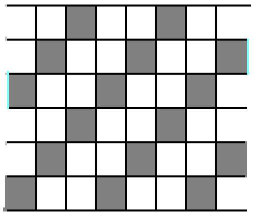


图 01—02

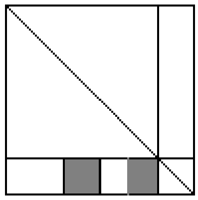

图 01—03

分析：如图 01—02，取任一个红格 K_0 为中心的 3×3 正方形。不能在 K 处涂红色。因为，如果在 K 处涂红色，在 2×3 的矩形：AFHD、ABST、MNCD 中均有两个红方格。为了使矩形 BCGE 内含有两个红方格，不论红方格放在任何一处，都将使上述的三个矩形的一个出现三个红方格。这就说，红方格不能与 K_0 有公共的边，只能是在其对角线上。从总体上来说，只能，如图 01—03。因此，每一个 3×3 的正方形中有且只有 3 个红方格。又在 9×11 矩形中，可分为九个 3×3 的正方形及三个 2×3 的矩形，故一共有 9×3＋3×2=33 个红方格。

3. 由于涂色的格子总共有 n－1 个，

所以 n 列中至少有一列的格子未涂色，

经过调整，可以使最下面的一行中涂色格子都在对角线下方（如图 01—04）。


图 01—04

再考察除去最右一列与最下一行的（n－1）×（n－1）个方格，继续上面的过程，必可将 n－1 个涂色的格子移到所设的对角线下方。

4. 证明：设每个小方格的边长为 1，考察黑方格区域的边界长度 L。开始时，由于只有 n－1 个方格，∴L≤4（n－1）。在以后的涂色过程中，尽管黑方格的总体面积增加了，但其周长不变，即仍有 L≤4（n－1）。如果要填满 n×n 的方格，就有 L=4n，显然发生矛盾。命题得证。

5. **证明：**将 E 中的点染成红、蓝二色，即证明必存在一个直角三角形，它们的顶点同色。

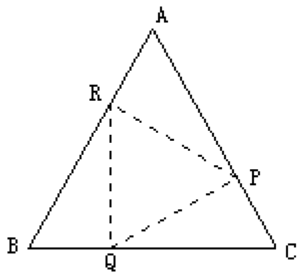


图 01—05

在三边上取三等分点 P，Q，R，如图 01—05。易知 RQ⊥BC，QP⊥AC，PR⊥AB。这三点必至少有两点同色。不妨设 R，Q 为红色。

（1）如果 BC 边上除 Q 点外还有红色的点 X，

则 Rt△RQX 三个顶点同为红色。

（2）如果 BC 边上除 Q 外不存在红色点，

则 B 点是蓝色的。如果 AB 上除 B 外还有蓝色点 Y，

作 YM⊥BC，M 为垂足，显然 M 不同于 Q。

所以 Rt△YBM 三个顶点均为蓝色；

如果 AB 上除 B 点外均为红色。作 QZ⊥AB，Z 为垂足，

则 Rt△RQZ 的三个顶点均为红色。证毕。

6. **解：**如图 01—06，第 i 行（1≤i≤19）中的 a_i 个方格涂黑（例如，a_2=3，则涂 3 格），在第 j 列（1≤j≤85）中白方格数，是小于 a_i 的个数（例如，a_3=5），在第 5 列上方有两个白格子，就是 a_1<5，a_2<5，b_5-1=2。

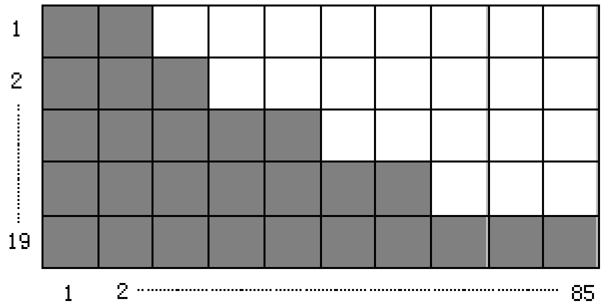


图 01—06

因此，所有的格子（黑的和白的）的个数就是

$a_1+a_2+\cdots+a_{19}+$（b_1-1）+（b_2-1）$+\cdots+$（$b_{85}-1$）$=19\times85$，

∴$a_1+a_2+\cdots+a_{19}+b_1+b_2+\cdots+b_{85}=19\times85+85=20\times85=1700$。

注：从这几个例子可以看出，既可作为手段，转化问题的形式，便于叙述，也有本来就是涂色的形式，要调整、构造新形式。思考起来很灵活。

7. 设红、黄、蓝玻璃片各有 x，y，z 块，则 x，y，z 被 3 除后余数中必有两个相等（否则 x+y+z=1987 是 3 的倍数）。

令 x=3a+m，y=3b+n，z=3c+n，并设 c≥b。

若 c=b，结论显然成立；若 c>b，可取黄、蓝各 3b+n 块，全变成红色，黄片为 0，蓝片为 3（c－b）块。

再取红、蓝各 1 块，产生黄片 2 块；再取蓝、黄各两片（∵c>b，∴3（c－b）≥3），产生红片 4 块，这时蓝片有[3（c－b）－1] －2=3（c－b－1）块。如果有 c－b－1=0，则命题获证。如果 c－b－1≠0，依次反复上述步骤，达到 c－b－k=0 为此（k∈N），最后全变成了红色。

由上面的过程可知，三个数除以 3 所得的余数中，两个相同的余数的玻璃片，最后都变成了另一个余数不同的玻璃片的颜色。因此，与操作顺序无关。

注：本题充分注意到 1987 不是 3 的倍数，因而由抽屉原理得知 x，y，z 被 3 除后余数中必有两个相同，根据这一特征，还可以推广问题的结论。这是一种与整除有关的涂色问题。

8. 证明：集合 M 的不同涂色方法总数为 4^{1987}。令 a 是 M 中构成具有 10 项的等差数列的数目，将这 10 项用同一颜色去涂，则共有 $4a\cdot4^{1987-10}=a\cdot4^{1978}$ 种涂法。

如果 $a\cdot4^{1978}<4^{1987}$，即 $a<4^9$。

设等差数列首项为 k，公差为 d，则 $1\le k\le1978, d\le\left[\dfrac{1987-k}{9}\right]$，其中[x]表示 x 的整数部分，

$$\therefore a=\sum_{k=1}^{1978}\left[\frac{1987-k}{9}\right]\le\frac{1986+1985+\cdots+9}{9}=\frac{(1986+9)\times1978}{2\times9}<\frac{2^{11}\times2^{11}}{2^4}=4^9$$

9.解：将 y 轴上的整点染上黑色或白色，并且黑、白各有无穷多个（例如黑、白相间）。再将其余整点都染上红色，则这样的染色满足题设要求。

证明：不难看出到上述设计，白色点、黑色点、红色点出现在无穷多条平行于横轴的直线上，故满足条件（1）。

设 A 为白点，B 为红点，C 为黑点，显然 B 不在 y 轴上，即 B 不在 AC 上，而且□ABCD 顶点 D 的横（纵）坐标，所以 D 一定是整点。由于 A，C 横坐标为 0，B 横坐标不为 0，所以 D 的横坐标不为 0，即 D 为红点。满足条件（2）。

注：例 8 要用到重复排列的问题解法，还要进行计算，放缩。例 9 则是设计一种方案，证明它符合要求。

数学竞赛中，常见的是与拉姆赛数有关的问题。

无三点共线的 n 个点中，任两点都连成线段，所得的图称为完全图，记为 K_n.如果设 R（k）表示用 k 种颜色涂 K_n 中所有边时，总能找到同色三形的点数 n 的最小数，则称R（k）拉姆赛数。

10. 证明：(1) 取长为 2 的线段 AB，且两端点不同色，又设 AB 的中点 C 与 A 同色。作正△AEC 和△ADC（如图 01—08），由题设，D，E 不能与 A，C 同色。

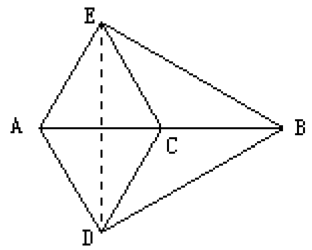


图 01—08

于是△BDE 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三形，其顶点同色。

(2) 将平面分成宽度为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的水平带状区域，每个区域含它下面的一条直线（边界），不含它上面的一条直线。让相邻的两个区域染上不同颜色即可。

11. 证明：将 P_1，P_2，…，P_6 组成的三角形，最短边都涂是红色。

如果从 P_1 出发，所连的五条线有三条是红的，不妨设 P_1P_2，P_1P_3，P_1P_4 涂红色，在△$P_2P_3P_4$ 必有一条是红色，又不妨设 P_2P_3 涂红色，则△$P_1P_2P_3$ 三边均涂红色，且其中必有一条最长边，这条边即为所求。

如果从 P_1 出发至少有三条未涂色，不妨设 P_1P_2，P_1P_3，P_1P_4，∵△$P_1P_2P_3$，△$P_1P_2P_4$，△$P_1P_3P_4$ 每个三角形至少有一边涂红色，于是△$P_2P_3P_4$ 是红色三角形，此即符合要求。

综上所述，知命题成立。

在平面上作有公共底边 BD 且边长为 1 的两个正△ABD 和△BCD（如图 01—09）。如果这五条线段有一条满足要则证毕。

否则，只有 A、C 同色。这时，将这两个正三角绕 A 旋转，使 C 到达 F 处，且|CF|=1。如果在两个正△AEG 和△EFG 的五边中有一条满足要求，问题也就得证，否则只有 A、F 同色，从而 C，F 同角且|CF|=1。证毕。

注：本题先用涂色观点，实际上是用反证法证得 A，C 同色是最困难的问题，又用旋转的变换，构造了长为 1 且同色的线段 CF。读了解法并不难，思考起来则不易。

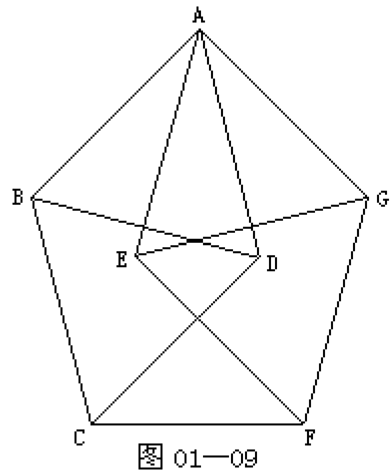


图 01—09

§30 组合数学选讲

组合数学是中学数学竞赛的“重头戏”，具有形式多样，内容广泛的特点.本讲主要围绕组合计数，组合恒等式及组合最值展开

例题讲解

1．圆周上有 800 个点，依顺时针方向标号为 1,2,…,800 它们将圆周分成 800 个间隙.今选定某一点染成红色，然后按如下规则，逐次染红其余的一些点：若第 k 号点染成了红色，则可依顺时针方向转过 k 个间隙，将所到达的点染成红色，试求圆周上最多可以得到多少个红点？

2．集合 X 的覆盖是指 X 的一族互不相同的非空子集 A_1、A_2、…、A_k，它们的并集 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=X$，现有集合 X={1,2,…,n}，若不考虑 $A_1, A_2,\cdots, A_k$ 的顺序，试求 X 的覆盖有多少个？

3．已知集合 X={1,2,…,n}，映射 f：X→X，满足对所有的 x∈X，均有 f(f(x))=x，求这样的映射 f 的个数.

4．S 为{1,2,…,n}的一些子集族，且 S 中任意两个集合互不包含，求证：S 的元素个数的最大值为 $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$(Sperner 定理)

5．设 M={ 1,2,3,…,$2^m n$} ($m,n\in N^*$)是连续 $2^m n$ 个正整数组成的集合，求最小的正整数 k，使得 M 的任何 k 元子集中都存在 m+1 个数，$a_1,a_2,\cdots a_{m+1}$，满足 $a_i|a_{i+1}$ (i=1,2,…,m).

6．计算 $\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$.

7．证明：$\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\binom{m}{q-k}=\binom{m+n}{q}$ (范德蒙公式)

8．在平面上有 n(≥3)个点，设其中任意两点的距离的最大值为 d，我们称距离为 d 的两点间的线段为该点集的直径，证明：直径的数目至多有 n 条.

9．已知：两个非负整数组成的不同集合 $\{a_1,a_a,\cdots,a_n\}$ 和 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$. 求证：集合 $\{a_i+a_j|1\le i<j\le n\}$ 与集合 $\{b_i+b_j|1\le i<j\le n\}$ 相同的充要条件是 n 是 2 的幂次，这里允许集合内，相同的元素重复出现.

课后练习

1. 空间 n 条直线，最多能把空间分成多少块空间区域？

2. 证明：$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2=\binom{2n}{n}$.

3. 证明：$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{n}$.

4. 证明：在边长为 1 的等边三角形内有五个点，则这五个点中一定有距离小于 $\frac{1}{2}$ 的两点.

例题答案：

1．解：易见，第 k 号点能被染红的充要条件是

$\exists j\in N^*\cup\{0\}$，使得 $a_0\times 2^j\equiv k\ (\mathrm{mod}\,800)$，$1\leqslant k\leqslant 800$ ①

这里 a_0 是最初染的点的号码，为求最大值，不妨令 $a_0=1$.即 $2^j\equiv k\ (\mathrm{mod}\,2^5\times 5^2)$.

当 j=0,1,2,3,4 时，k 分别为 1,2,4,8,16，又由于 2 模 25 的阶 $\delta_{25}(2)=20$，因此，当 j⩾5 时

$2^{j+20}-2^j=2^j(2^{20}-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 800)$,

而对 $\forall k<20,k\in N^*$，及 $j\geqslant 5,j\in N^*$，由于 $25+(2^k-1)$，所以

$2^{j+k}-2^j=2^j(2^k-1)$不为 800 的倍数.

所以，共存在 5+20=25 个 k，满足①式。

注：本题解法不止一种，但利用些同余理论，可使解法简洁许多.

2．解：首先，X 的非空子集共有 2^n-1 个，它们共组成了 2^{2^n-1}-1 个非空子集族.其次，这些子集族中，不合某一元素 i 的非空子集组成的非空子集族有 $\left(2^{2^{n-1}-1}-1\right)$ 个；不含两个元素的子集组成的族有 $\left(2^{2^{n-2}-1}-1\right)$ 个；依次类推，则由容斥原理，X 的覆盖共有

$$(2^{2^n-1}-1)-\binom{n}{1}(2^{2^{n-1}-1}-1)+\binom{n}{2}(2^{2^{n-2}-1}-1)-\cdots=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(2^{2^{n-j}-1}-1) \text{ 个.}$$

注：有些组合计数问题直接计数较难，但从反面考虑简洁明了.

3．解：设 n 元中有 j 个对 x、y 满足 f(x)=y 且 f(y)=x，其余的满足 f(x)=x，则

当 j=0 时，仅一种映射，即恒等映射.

当 j>0 时，每次取两个作为一对，共取 j 对有 $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2j+2}{2}$ 种取法.

则不考虑 j 对的顺序，有

$$\frac{1}{j!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2j+2}{2}=\binom{n}{2j}\cdot(2j-1)!! \ .$$

因此，映射 f 的个数为 $1+\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2j}\cdot(2j-1)!!$.

注：这些计数问题，以多次在国际竞赛中出现，但对于一般地情况 ($f^{(n)}(x)=x$) 下的映射计数，尚无较好的结论.

4．解：考虑 n 个元素 1,2,⋯,n 的全排列，显然为 n!种，另一方面，全排列中前 k 个元素恰好组成 S 中的某个集 S_i 的，有 k!(n–k)!个，由于 S 中任意子集互不包含，所以，这种“头”在 S 中的全排列互不同.

设 S 中有 f_k 个 A_i，满足$|A_i|=k$ (k=1,2,⋯,n)，则

$\sum_{k=1}^{n}f_k\cdot k!(n-k)!\le n!$,又然知 $\binom{n}{k}$ 在 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$ 时最大，因此

当 S 是由{1,2,⋯,n}中全部 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 元子集组成时，等号成立.

注：Sperner 定理是 1928 年发现，证明的方法不止一种.

5．解：记 A={1,2,⋯,n}，任何一个以 i 为首项(1≤i≤n)，2 为公比的等比数列与 A 的交集记为 A.

一方面，由于 M 中的 $2^m n-n$ 个元的子集{n+1,n+2,⋯,2^mn}中，若存在满足要求的 m+1 个数：

$n+1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{m+1}\leqslant 2^m n$，使得 $a_i|a_{i+1}$ $(1\leqslant i\leqslant m)$，则 $a_{i+1}\geqslant 2a_i$，从而 $a_{m+1}\geqslant 2a_m\geqslant\cdots\geqslant 2^m a_1\geqslant 2^m(n+1)>2^m n$，矛盾，故不存在满足要求的 m+1 个数，因此所求的 $k\geqslant 2^m n-n+1$.

另一方面，若 $k=2^m n-n+1$ 时，可证明 M 中的任何 k 元子集 T 中，此有 m+1 个数 $a_1,a_2,\cdots a_{m+1}$ 满足 $a_i|a_{i+1}$ $(i\leqslant 1\leqslant m)$.

反证：假设这样的 m+1 个数不存在，考虑 2i+1 为首项 $\left(i\leq\frac{n-1}{2}\right)$，2 为公比的等比数列，它与集合 M 的交的元素个数为 $|A_{2i+1}|+m$，由假设知，它至少有 $|A_{2i+1}|$ 个元素不在 T 中，再注意到当 $i\neq j$ 时，$A_{2i+1}\cap A_{2j+1}=\phi$，可知 M 中至少有 $\sum\limits_{1\leq i\leq\frac{n-1}{2}}|A_{2i}+1|$ 个元素不在 T 中，

注意到 $\bigcup\limits_{1\leq i\leq\frac{n-1}{2}}A_{2i+1}=A$ 所以 $|M\setminus S|\geq\left|\bigcup\limits_{1\leq i\leq\frac{n-1}{2}}A_{2i}+1\right|=|A|=n$，

从而 $|T|\leqslant|M|-n\leqslant 2^m n-n$，这与 $|T|=2^m n-n+1$ 矛盾.故假设不成立.

综上所述满足要求的最小正整数值 k 为 $2^m n-n+1$.

注：这种先确定单边界限再证明最值是经常采用的.

6.解：$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=n\sum\limits_{k=1}^{n}k\binom{n-1}{k-1}$，作指标变换，令 $l=k-1$，则 $_1^n|k\to l|_0^{n-1}$，因此，

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n-1}{k-1}=\sum_{l=0}^{n-1}k\binom{n-1}{l}=\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)\binom{n-1}{l},$$

$$=\sum_{k=1}^{n}l\binom{n-1}{l}+\sum_{l=0}^{n-1}k\binom{n-1}{l},$$

$$=\sum_{k=1}^{n}l\binom{n-1}{l}+2^{n-1}.$$

再次用 $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$，所以 $\sum\limits_{l=0}^{n-1}l\binom{n-1}{l}+2^{n-1}=\sum\limits_{l=0}^{n-1}l\cdot\frac{n-1}{l}\cdot\binom{n-2}{l-1}+2^{n-1}$，

$$=\sum_{l=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{l-1}+2^{n-1},$$

$$=(n-1)\sum_{l=1}^{n-1}\binom{n-2}{l-1}+2^{n-1}.$$

作指标变换，令 $l-1$=S，则，$\left.{}_{1}^{n-1}\right| l \to s\Big|_{0}^{n-2}$ 所以

$$(n-1)\sum_{l=1}^{n-1}\binom{n-2}{l-1}+2^{n-1}=(n-1)\sum_{s=0}^{n-2}\binom{n-2}{s}+2^{n-1}$$

$$=(n-1)2^{n-2}+2^{n-1}.$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}$.

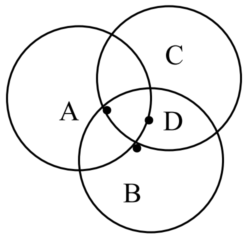
注：用利基本的组合恒等式及指标变换，是证明组合恒等式的重要方法之一.

7．证明：$\left\{\binom{n}{k}\right\},\left\{\binom{m}{k}\right\}$ 因为的母函数分别为 $(1+x)^n$ 和$(1+x)^m$

而$\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\binom{m}{q-k}$是这两个母函数$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$ 中 x^q 项的系数，又由于$(1+x)^{m+n}$ 中 x^q 的系数为$\binom{m+n}{q}$，因此命题成立.

注：构造母函数法，是证明组合问题重要方法之一，但如何找到母函数，是需要长时间的体验的.

8．证明：[引理]：平面上 n(n≥3)个点所组成的点集 S 中，或者存一点至多能引出一条直径，或者任一点至多能引出两条直径.



[引理的证明]：若每一点都至少能引出两条直径，又有一点 A 能引出三条直径 AB、AC、AD，则不妨设 AD 在 AB 与 AC 之间，且必须∠BAC ≤60°，因此⊙A(d)、⊙B(d)、⊙C(d)的公共部分覆盖了整个点集 S，显然与 D 能引出两条直径，矛盾！引理得证(如图). 下用归纳法证明原体：

显然，当 n=3 时，命题成立，

假设命题对 k 个点成立，则当 n=k+1 时，

如有一点 A 至多能引出一条直径，去掉 A 点后，

至多还有 k 条直径，故 S 最多有 k+1 条直径，否则任一点至多能

引出两条直径，故 S 最多有 $\frac{2(k+1)}{2}=k+1$ 条直径，从而命题成立.

注：组合几何在研究点集的组合性质时，对一般的图形也可定义直径、半径等.本问题还可推广至三维空间.

9．证明：必要性： 构造母函数 $f(x)=x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_n}$，

$g(x)=x^{b_1}+x^{b_2}+\cdots+x^{b_n}$.

所以 $f^2(x)-f(x^2)=2\sum_{1\le i<j\le n}x^{a_i+a_j}$， $g^2(x)-g(x^2)=2\sum_{1\le i<j\le n}x^{b_i+b_j}$

所以 $f^2(x)-f(x^2)=g^2(x)-g(x^2)$，即 $f^2(x)-g^2(x)=f(x^2)-g(x^2)$.

因为 $f(1)-g(1)=0$，所以 $x-1|f(x)-g(x)$.

所以 存在 $h\in N^*$，使得 $(x-1)^hP(x)=f(x)-g(x),P(x)\ne0$，

所以 $f^2(x)-f(x^2)=(x^2-1)^hP(x^2)$，

所以 $[f(x)+g(x)](x-1)^hP(x)=(x^2-1)^hP(x^2)$，

所以 $f(x)+g(x)=\dfrac{(x+1)^hP(x^2)}{P(x)}$.

令 x=1,则 $2n=2^h$，所以， $n=2^{h-1}$，即 n 为 2 的幂次.

充分性：直接构造如下

$\{a_1,a_a,\cdots,a_n\}$ 中取 $\binom{k+1}{2l}$ 个 $2l$，其中 $l=0,1,\cdots,[\frac{k+1}{2}]$，$\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 中取 $\binom{k+1}{2l+1}$ 个 $2l+1$,其中 $l=0,1,\cdots,[\frac{k}{2}]$，则这两个集合满足要求.

注：运用母函数处理集合问题，是常见的方法，尤其注意这种集合中出现在指数上而不是系数上的母函数方法.